ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tangier

TD N :3 : Electrostatique

Théorème de Gauss

Exercice 1 :

Angle solide délimité par un disque

1) Calculer l'angle solide délimité par un disque et un point P situé sur l'axe de ce disque ?

Exercice 2 :

Une sphère de centre O et de rayon R est chargée uniformément en volume avec la densité voluméque de charge : $\rho_0 > 0$.

1) Analyser les symétrie et les invariances de la distribution de charges et en déduire la direction du champ $\vec{E}(M)$ crée en un point M situé à la distance r du centre O de la sphère. Préciser les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$.
2) En utilisant le théorème de Gauss déterminer le module de $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.
3) En déduire le potentiel $V(M)$ en tout point M. on prendra $V = 0$ à l'infini.

Exercice 3 :

On considère un cylindre creux (C), d'axe $(z'z)$, de rayon R, de longueur infinie, chargé en surface par une densité surfacique de charge uniforme $\sigma > 0$.

1) Etudier les symétrie et les invariances de la distribution de charges et en déduire la direction du champ $\vec{E}(M)$ crée en un point M situé à la distance r de l'axe $(z'z)$ du cylindre. Préciser les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$.

2) En utilisant le théorème de Gauss déterminer le module de $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace ($r < R$ et $r > R$). Tracer l'allure de $E(r)$ en fonction de r (où $E(r)$ est le module de champ). Le champ est-il continu à la traversée de la surface ?

3) En prenant comme référence du potentiel $V(r) = V_0$, calculer le potentiel $V(r)$ en tout point M de l'espace. Tracer l'allure de $V(r)$ en fonction de r. vérifier que le potentiel $V(r)$ est continu à la traversée de la surface du cylindre.

Exercice 4:

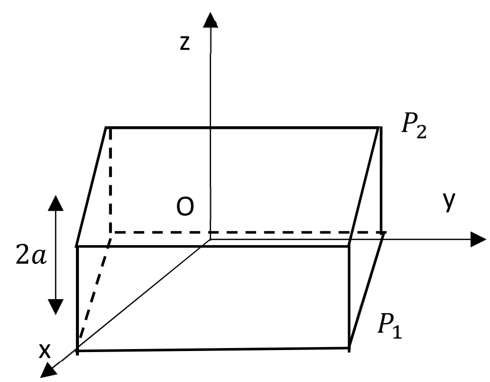
I) Un plan infini (xoy) porte une distribution de charges surfaciques σ_0 positive et uniforme.

1) Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges et en déduire la direction et les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$.crée en un point M de l'espace.

2) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le module de champ $\vec{E}(M)$.

3) En déduire le potentiel $V(M)$ en tout point M. on prendra le potentiel nul dans le plan (xoy).

II) Dans un repère $(oxyz)$, une distribution de charges de densité volumique uniforme et positive $\rho_0 = cste$ est répartie entre deux plans infinis parallèles au plan (xoy) et de cotes respectives : $z = -a$ et $z = +a$.



1) Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges et leurs implications sur le champ électrostatique crée en tout point M de l'espace.

2) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le module de champ $\vec{E}(M)$.

3) En déduire le potentiel $V(M)$ en tout point M. on prendra le potentiel nul dans le plan (xoy).

4) Tracer les courbes de variations de E et V en fonction de z.

Exercice 5 :

Une sphère de centre O et de rayon R est chargée en volume avec une densité de charges linéairement croissante avec la distance r au centre : $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$.

On repère la position d'un point M de l'espace par sa distance r au centre O de la sphère.

1) En utilisant la forme local du théorème de Gauss, déterminer $E(r)$ en tout point de l'espace.

On donne l'expression de la divergence en coordonnées sphériques :

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta E_\theta) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

1) Déterminer le potentiel $V(M)$ en un point M. on prendra $V = 0$ à l'infini.

2) Calculer le Laplacien ΔV et vérifier la forme locale du théorème de Gauss pour le potentiel (équation de Poisson et équation de Laplace).

Expression du Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tangier

Corrigé du TD N :3 : Electrostatique

Théorème de Gauss

Exercice 1: angle solide délimité par un disque

On découpe le disque en une succession de couronnes circulaires élémentaires, de largeur dr et de même axe $(0P)$, imbriquées les unes à l'intérieur des autres. Les éléments de surface constituant chaque couronne élémentaire sont orientés en formant même angle φ avec l'axe du disque (cf schéma ci-dessous).

La surface d'une couronne élémentaire est :

$dS\ = 2\pi r dr$ avec $r = htan\varphi \Rightarrow dr = (h/cos^2\varphi)d\varphi$

d'où :

$$dS = 2\pi h\ tan\varphi\ (h/cos^2\varphi)d\varphi\ =\ 2\pi h^2(tan\varphi/cos^2\varphi)d\varphi$$

D'autre part,

$$d\Omega\ =\ dS\ cos\varphi/a^2(\varphi)$$

avec $a(\varphi) = h/cos\varphi$

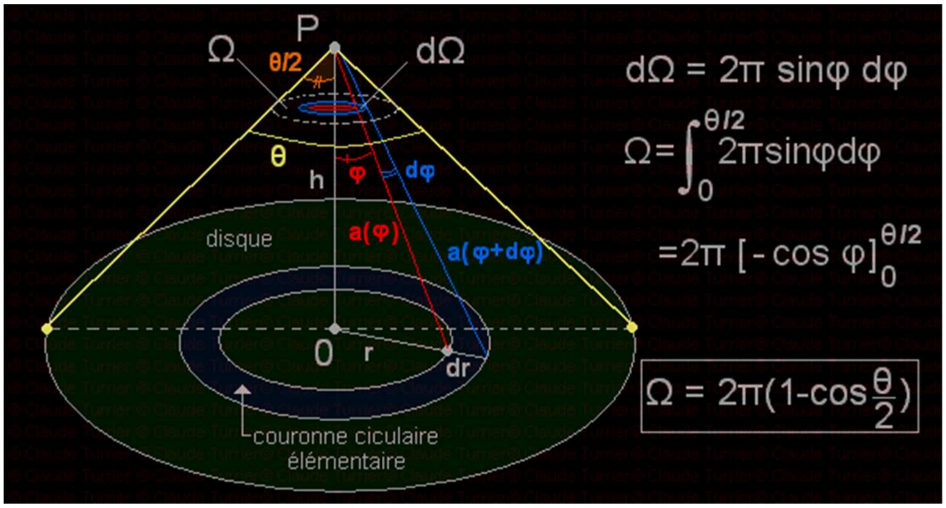
d'où :

$$d\Omega =\ dS\ cos\varphi\ cos^2\varphi/h^2$$

$$d\Omega\ =\ 2\pi h^2(tan\varphi/cos^2\varphi)\ cos\varphi\ cos^2\varphi/h^2 d\varphi$$

$$d\Omega\ =\ 2\pi sin\varphi d\varphi$$

Pour couvrir tout le disque, on intègre une infinité de couronnes circulaires élémentaires en faisant varier φ entre 0 et $\theta/2$. On en déduit $\Omega = 2\pi\ (1 - cos\ \theta/2)$.



Angle solide délimité par un disque et par un point P situé sur son axe

- Si $\theta \ \rightarrow \ \pi$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \longrightarrow 0$ et $\Omega \longrightarrow 2\pi$
- Si $\theta \ \rightarrow \ 0$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \longrightarrow 1$ et $\Omega \longrightarrow 0$

Exercice 2:

1) **Symétrie:** tout plan contenant (OM) est un plan de symétrie.

   $\Rightarrow$ Symétrie axiale suivant (OM).

   Le champ $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$

   Invariance : par rotation de θ et φ suivant le centre O la valeur de $E_r(r, \theta, \varphi)$ ne varie pas, alors :

   $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$ c'est la symétrie sphérique.

2) Calculons $E_r(r)$ par application du théorème de Gauss

   Choix de la surface de Gauss : par application de la raison de symétrie décrit en 1), la surface de Gauss est une sphère $\Sigma(O, r)$ de rayon r et de centre O.

   Calcul de flux:

$$\phi_{\vec{E}/_{\Sigma}} = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{d\Sigma} = \frac{\Sigma q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_{\vec{E}/_{\Sigma}} = \oiint_{\Sigma} E_r(r) d\,\Sigma$$

(car $\overrightarrow{d\Sigma} = d\Sigma\vec{e}_r$)

Alors

$$\phi_{\vec{E}/\vec{\Sigma}} = \oiint_{\vec{\Sigma}} E_r(r)\, r^2 sin\theta d\theta d\varphi$$

(avec $E_r(r)$est constant sur la sphère $\Sigma(O, r)$)

Donc :

$$\phi_{\vec{E}/\vec{\Sigma}} = E_r(r) \oiint_{\vec{\Sigma}} r^2 sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\phi_{\vec{E}/\vec{\Sigma}} = E_r(r).\, 4\pi r^2$$

Alors

$$E_r(r).\, 4\pi r^2 = \frac{\Sigma q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r) = \frac{\Sigma q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Selon la variable r dont dépend le champ on a deux cas :

- $\boldsymbol{r > R}$ **:**

$$\Sigma q_{int} = \iiint_V \rho_0 dV = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$

V est le volume limité par la surface de Gauss :

Donc :

$$E_r(r) = \rho_0 \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

- $\boldsymbol{r < R}$ **:**

$$\Sigma q_{int} = \iiint_V \rho_0 dV = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

Donc :

$$E_r(r) = \rho_0 \frac{r}{3\varepsilon_0}$$

3) En déduire $V(M)$

On a :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

Donc

$$V(M) = -\int E_r(r)\,dr$$

Suivant les valeurs de r on a deux cas :

- $\boldsymbol{r > R}$ **:**

$$V(M) = -\int \rho_0 \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$V(M) = \rho_0 \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1$$

Et on a $V(\infty) = 0$ donc $C_1 = 0$

Finalement :

$$V(M) = \rho_0 \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

- $\boldsymbol{r < R}$ **:**

$$V(M) = -\int \rho_0 \frac{r}{3\varepsilon_0}\,dr$$

$$V(M) = -\rho_0 \frac{r^2}{6\varepsilon_0} + C_2$$

Déterminons C_2.

$V(M)$ est une fonction continue alors :

$$V(r \to R^-) = V(r \to R^+)$$

Donc :

$$-\rho_0 \frac{R^2}{6\varepsilon_0} + C_2 = \rho_0 \frac{R^3}{3\varepsilon_0 R}$$

D'où :

$$C_2 = \rho_0 \frac{R^2}{2\varepsilon_0}$$

Finalement :

$$V(M) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

Exercice 4 :

I)

1) symétrie : tout plan perpendiculaire à (P) est un plan de symétrie

Symétrie axiale suivant (oz), $M \in (oz)$

$$\vec{E}(M) = E_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

Invariance : par translation suivant x, y ; donc le champ ne dépendra que de z :

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z = E(z)\vec{e}_z$$

3) Calculons $E(M)$:

- **Choix de la surface de Gauss :** est un cylindre d'axe (oz) et de hauteur h
- **Calculons le flux à travers la surface de Gauss :** $\phi_{\vec{E}/S_G}$

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{intérieur}$$

$$\phi_{\vec{E}/S_G} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_0 S_b \qquad (1)$$

- Calculons $\vec{E}(M)$:

  On a :

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = \oiint_{(\overrightarrow{S_G})} \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint_{(\overrightarrow{S_{b1}})} \vec{E}.\overrightarrow{ds} + \iint_{(\overrightarrow{S_{b2}})} \vec{E}.\overrightarrow{ds} + \underbrace{\iint_{(\overrightarrow{S_L})} \vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{=0\ (car\ \overrightarrow{S_L} \perp \vec{E}(M)}$$

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = \iint_{(\overrightarrow{S_{b1}})} \vec{E}.\overrightarrow{ds} + \iint_{(\overrightarrow{S_{b2}})} \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

Et on a (p) un plan de symétrie alors : $E(-z) = -E(z)$

Donc :

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = \iint_{(\overrightarrow{S_{b1}})} E(-z)\vec{e}_z.ds\ \overrightarrow{(-e_z)} + \iint_{(\overrightarrow{S_{b2}})} E(-z)\vec{e}_z.ds\ \vec{e}_z$$

Et on aussi : $S_{b1} = S_{b2} = S$

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = E(z) \iint_{(\vec{S})} ds$$

$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = 2E(z).S$ (2)

S est la surface de base de la surface de Gauss :

Finalement de (1) et (2) on a pour:

- $\boldsymbol{z > 0}$ **:**

  $E(z) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_0$

- $\boldsymbol{z < 0}$ **:**

$$E(z) = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_0$$

Ou bien par l'expression suivante qui généralise les deux cas:

$$\boldsymbol{E(z) = \pm \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}}$$

En z=0 le champ est non défini donc on a une discontinuité de E(M) en z=0, la discontinuité est de :

$$E(0^+) - E(0^-) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

D'où la formule de discontinuité de la composante de champ est vérifiée .

4) Calculons $V(M)$

on a

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

Donc

$$V(M) = -\int E_r(z)\,dz$$

Suivant les valeurs de z on a deux cas :

- $\boldsymbol{z > 0}$ **:**

$$V(M) = -\int \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}dz$$

$$V(M) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + C_1$$

- $\boldsymbol{z > 0}$ **:**

$$V(M) = \int \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}dz$$

$$V(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + C_2$$

Et on a $V(z)$ est une fonction continue donc en $z = 0$ on a :

$$V(0^-) = V(0^+)$$

Alors : $C_1 = C_2$

Finalement :

$$V(z) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z & si\ z > 0 \\ \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z & si\ z < 0 \end{cases}$$

II)

1) Le même raisonnement que I)1) $E(-z) = -E(z)$, en plus la distribution est volumique alors $E(z)$ est défini en $z = 0$ par $E(0) = 0$.
2)) calculons $E(M)$

- Choix de la surface de Gauss : est un cylindre d'axe (oz) de base S_b (dans le plan (xoy)) et de hauteur $h = z = OM$.
- Calculons le flux à travers la surface de Gauss : $\phi_{\vec{E}/S_G}$

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{intérieur} \qquad (1)$$

- Calculons $\vec{E}(M)$:

  On a :

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = \oiint_{(\overrightarrow{S_G})} \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \underbrace{\iint_{(\overrightarrow{S_{b1}})} \vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{=0\ (\vec{E}(M)=0)} + \iint_{(\overrightarrow{S_{b2}})} \vec{E}.\overrightarrow{ds} + \underbrace{\iint_{(\overrightarrow{S_L})} \vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{=0\ (car\ \overrightarrow{S_L}\perp\vec{E}(M)}$$

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = \iint_{(\overrightarrow{S_{b2}})} E(z)\vec{e}_z ds\vec{e}_z$$

$$\phi_{\vec{E}/\overrightarrow{S_G}} = E(z)S_{b2}$$

Alors

$$E(z) = \frac{\sum q_{intérieur}}{\varepsilon_0 S_{b2}}$$

On a : deux cas à étudier :

- $\boldsymbol{z > a}$ **:** $\sum q_{intérieur} = \rho_0 S_{b2} a$ (charge contenue dans le cylindre de base S_{b2} et de hauteur h)

$$E(z) = \frac{\rho_0 S_{b2} a}{\varepsilon_0 S_{b2}} = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$$

- $\boldsymbol{z < a}$ **:**
- $\sum q_{intérieur} = \rho_0 S_{b2} z$ (charge contenue dans le cylindre de base S_{b2} et de hauteur z)

$$E(z) = \frac{\rho_0 S_{b2} z}{\varepsilon_0 S_{b2}} = \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0}$$

3) Calculons le potentiel

   on a

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

Donc

$$V(M) = -\int E_r(z)\,dz$$

Suivant les valeurs de z on a deux cas :

- $\boldsymbol{z < a}$ **:**

$$V(z) = -\int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z dz$$

$$V(M) = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} z^2 + C_1$$

- $\boldsymbol{z > a}$ **:**

$$V(z) = -\int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} a\,dz$$

$$V(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} az + C_2$$

Calculons C_1 et C_2

On a $V(0) = 0$ alors $C_1 = 0$

Et on a $V(z)$ est une fonction continue donc en $z = a$ on a :

$$V(a^-) = V(a^+)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} a^2 == -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} az + C_2$$

Alors : $C_2 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} a^2$

Finalement :

$$V(z) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} z^2 & si\ z < a \\ -\dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} z + \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} a^2 & si\ z > 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$$

1) déterminons $E(r)$

On a :

$$div\vec{E} = \rho(r)$$

En plus, on a la symétrie sphérique (même raisonnement que précédemment) ;

$$\Rightarrow div\vec{E}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2E(r)\right) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$$

Alors on a deux cas à étudier :

$\boldsymbol{r < R}$ **:** $\rho(r) = \rho_0\frac{r}{R}$

$$\Rightarrow div\vec{E}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2E(r)\right) = \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0 R} \qquad ;(E_\theta = E_\varphi = 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2E(r)\right) = \frac{\rho_0 r^3}{\varepsilon_0 R}$$

$$\Leftrightarrow \int d\left(r^2E(r)\right) = \int \frac{\rho_0 r^3}{\varepsilon_0 R}dr$$

$$\Leftrightarrow r^2E(r) = \frac{\rho_0 r^4}{4\varepsilon_0 R} + K$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R} + \frac{K}{r^2}$$

$E(0) = 0$ (on a le center O est un centre de symétrie) $\Longrightarrow K = 0$

- $\boldsymbol{r > R}$ **:**

  $\rho(r) = 0$ (pas de charge à l'extérieur), donc :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2E(r)\right) = 0$$

$$r^2E(r) = K'$$

$$E(r) = \frac{K'}{r^2}$$

Calculons K' (continuité $E_{int}(R) = E_{ext}(R)$)

Donc

$$\frac{\rho_0 rR^2}{4\varepsilon_0 R} = \frac{K'}{R^2}$$

$$\Longrightarrow K' = \frac{\rho_0 r R^3}{4\varepsilon_0}$$

D'où :

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R} & r < R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

2) Calcul de potentiel $V(r)$

On a :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

Donc

$$V(M) = -\int E_r(r)\,dr$$

Suivant les valeurs de r on a deux cas :

- $\boldsymbol{r < R}$ **:**

$$V(M) = -\int \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R}\,dr$$

$$V(M) = -\frac{\rho_0 r^3}{12\varepsilon_0 R} + C_1$$

- $\boldsymbol{r > R}$ **:**

$$V(M) = -\int \frac{\rho_0 r R^3}{4\varepsilon_0}\,dr$$

$$V(M) = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r} + C_2$$

Et on a $V(\infty) = 0$ donc $C_2 = 0$

$V(M)$ est une fonction continue alors :

$$V(r \to R^-) = V(r \to R^+)$$

$alors$:

$$\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r} = -\frac{\rho_0 r^3}{12\varepsilon_0 R} + C_1$$

Donc :

$$C_1 = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0}$$

Finalement :

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 r^3}{12\varepsilon_0 R} + \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} & r < R \\ \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

3) forme locale du théorème de Gauss pour $V(r)$

- ❖ Equation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$
- ❖ Equation de Laplacien : $\Delta V = 0$

Calculons ΔV

- $\boldsymbol{r < R}$ **:**

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r})$$

On a :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R} \Longrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{-\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R}\right) = \frac{-4\rho_0 r^3}{r^2 4\varepsilon_0 R}$$

Alors :

$$\Delta V = \frac{-\rho_0 r}{\varepsilon_0 R} = \frac{-\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

Alors l'équation de Poisson est vérifiée.

- $\boldsymbol{r > R}$ **:**

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r})$$

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0}\right)$$

Donc : $\Delta V = 0$ et l'équation de Laplacien est vérifiée.