ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tangier

TD N :4 : Electrostatique

Dipôle électrique

L'équilibre des conducteurs

Exercice 1:

Soit un dipôle électrique défini par deux charge $-q$ et $+q$ placées respectivement aux points A et B, séparés par une distance a. On considère un point M très lointain des charges. On donne :

$\theta = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}\right)$; $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$; $r \gg a$; $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$; $\vec{r}_1 = \overrightarrow{AM}$; $\vec{r}_2 = \overrightarrow{BM}$

1) Tracer un schéma représentatif du dipôle.
2) Déterminer $V(M)$ l'expression du potentiel électrique crée par le dipôle en M par la méthode d'approximation :
   2.1) Géométrique
   2.2) DL de 1^{ere} ordre, on donne : $(\mathbf{1} \pm \boldsymbol{\varepsilon})^{\boldsymbol{n}} \simeq \mathbf{1} + \boldsymbol{n\varepsilon}$ avec $\varepsilon \ll 1$
   2.3) Donner l'expression de moment dipolaire et écrire l'expression de $V(M)$ en fonction de $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$.
3) Déterminer $\vec{E}_r(M)$, $\vec{E}_\theta(M)$ les composantes radiale et tangentielle de champ électrique crée par le dipôle en M. On donne : l'expression du gradient en coordonnées polaires : $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\left(\boldsymbol{V(M)}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}}$
4) Montrer que $tan\alpha = \frac{1}{2}tan\theta$, α est l'angle entre la composante de champ $\vec{E}(M)$ et sa composante radiale $\vec{E}_r(M)$.
5) Déterminer l'expression de $\vec{E}(M)$ en fonction de $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ dans les positions de Gauss :
   5.1) $\theta = 0$ et $\theta = \pi$
   5.2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$
6) Montrer que l'équation des lignes de champ en coordonnées polaire s'écrit : $r = Ksin^2\theta, K$ est une constante positive, on donne : $\vec{E}(M) \wedge \overrightarrow{dM} = \vec{0}$.
7) Montrer que les surfaces équipotentielles sont définies par l'équation : $r = bcos\theta$ et vérifier que la constante $b > 0$ si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $b < 0$ si $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.
8) Dans le plan polaire, tracer les courbes de lignes de champ et celles des surfaces équipotentielles.

Exercice 2:

1) Une sphère conductrice (S_1), de rayon R_1 porte une charge $Q_1 > 0$. Calculer son potentiel V, sa capacité C et sa densité surfacique σ.
2) Une seconde sphère conductrice (S_2) initialement neutre, de rayon $R_2 < R_1$est placé à une distance de (S_1), suffisamment éloignée pour que l'on puisse négliger les phénomènes d'influence. Les deux sphères sont reliées par un fil conducteur de capacité négligeable.

Calculer, en fonction de R_1, R_2 et Q_1 les charges Q_1' et Q_2' des deux sphères lorsque l'équilibre est atteint. En déduire en fonction de R_1 et R_2 les densités surfaciques de charge notées respectivement σ_1 et σ_2. Sur les surfaces de (S_1) et (S_2). Calculer le rapport σ_1/σ_2.

3) Enoncer le théorème de Coulomb et déterminer les champs électrostatiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ au voisinage des surfaces de (S_1) et (S_2). Comparer leurs intensités. Conclure.

Exercice 3:

1) Une sphère conductrice pleine S_1 de centre O_1 et de rayon R_1 porte une charge $Q_1 > 0$. Une seconde sphère conductrice pleine S_2 creuse de rayon intérieur $R_2 > R_1$et de rayon extérieur R_3 porte une charge $Q_2 > 0$. On place S_1 à l'intérieur de S_2 de telle sorte que les sphères soient concentriques. On note respectivement, S_{2int} et S_{2ext} les surfaces interne et externe de S_2. Et Q_1', Q_2' et Q_3' les charges de S_1, S_{2int} et S_{2ex} .

1.1) Donner en justifiant, la répartition des charges sur les surfaces de S_1 et S_2, en fonction de Q_1 et Q_2.

1.2) Calculer le potentiel V_1' de S_1.

2) S_1étant toujours à l'intérieur de S_2, on les relie par un fil conducteur de capacité négligeable.

2.1) Donner la nouvelle répartition de charges Q_1'', Q_2'' et Q_3'' sur les surfaces S_1, S_{2int} et S_{2ext}.

2.2) Calculer le nouveau potentiel V_2'' de S_1.

3) S_1étant toujours à l'intérieur de S_2, on supprime la liaison entre les deux sphères et on relie S_1 au sol, et S_2 au potentiel $V_2 > 0$.

3.1) Indiquer à l'aide d'un schéma la répartition des charges sur les surfaces des sphères. Justifier votre réponse. On note Q_1''', Q_2''' et Q_3''', les charges de S_1, S_{2int} et S_{2ext}.

3.2) Calculer le champ et le potentiel électrostatique en tout point M situé entre S_1 et S_2 et repéré par sa distance $r = OM$ au centre commun O des deux sphères.

3.3) En déduire en fonction de V_2 les charges Q_1''', Q_2''' et Q_3'''.

4) On isole S_1 du sol, (étant toujours à l'intérieur de S_2) elle porte une charge $Q > 0$; et on relie S_2 au sol.

4.1) Donner la nouvelle répartition des charges sur les surfaces de S_1 et S_2 et exprimer le champ $\vec{E}(M)$ entre les deux conducteurs S_1 et S_2.

4.2) Calculer $V_1(M)$ le potentiel S_1 et en déduire la capacité C du condensateur sphérique ainsi formé. Calculer en fonction de Q_1, R et ε_0 l'énergie électrostatique W_e de ce condensateur.

4.3) Au moyen de la densité d'énergie, $\frac{dW_e}{dv} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$ retrouver l'expression précédente de W_e.

Exercice 4:

Un condensateur plan, placé dans l'air sec ($\varepsilon = \varepsilon_0$), est constitué de deux armatures (A_1,A_2) métalliques de surfaces S et distantes de e. On admettra que les deux armatures sont en influence totale (les effets de bords sont négligeables). Le condensateur est porté à une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$. Soient Q la charge du condensateur et σ la densité surfacique de charge.

1) Déterminer, en fonction de la charge Q le champ $\vec{E}$ entre les armatures.

2) Calculer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les armatures et en déduire la capacité C du condensateur.

3) Calculer en fonction de σ, e, ε_0 et S, l'énergie électrostatique W_e emmagasinée dans ce condensateur. Vérifier que la densité volumique d'énergie est :$\frac{dW_e}{dv} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$

4) On introduit, parallèlement aux armatures une plaque métallique d'épaisseur a. conclure la capacité du condensateur équivalent.

ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tangier

Corrigé de TD N :4 : Electrostatique

Dipôle électrique

L'équilibre des conducteurs

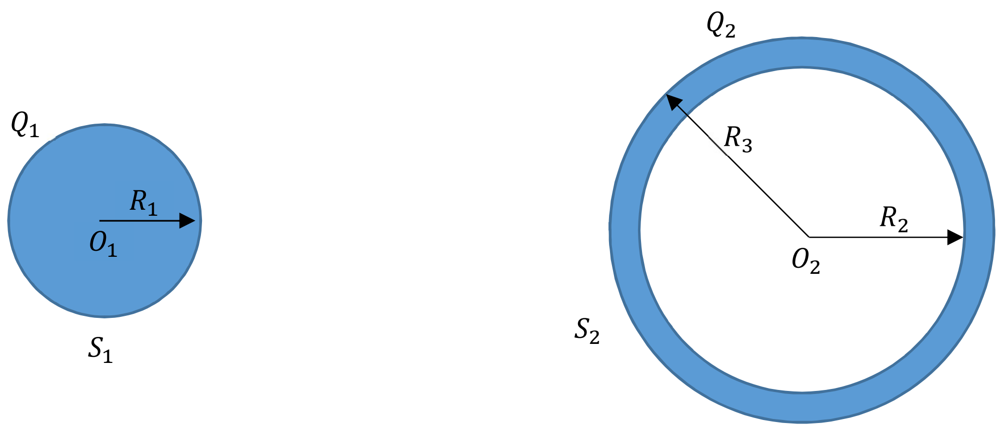
[redacted]

Question de cours concernant le chapitre 3: Dipôle électrique

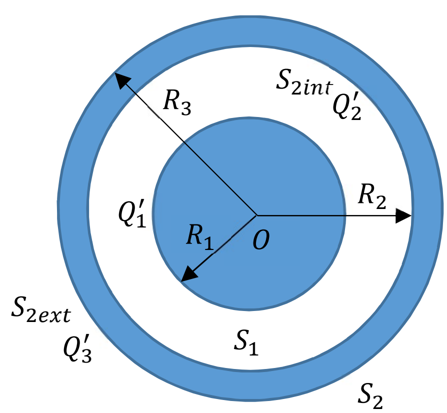
Exercice 2:

Exercice déjà fait dans le cours

Exercice 3:



1)



1.1) Répartition des charges

- ✓ S_1 est isolé, conserve sa charge initiale $\Longrightarrow Q_1' = Q_1$
- ✓ S_2 : S_{2in} est en influence totale avec S_1, donc selon le théorème des éléments correspondants on a : $Q_2' = -Q_1' = -Q_1$.
  S_2 est isolé, il conserve sa charge initiale, donc : $Q_2' + Q_3' = Q_2$
  $\Longrightarrow Q_3' = Q_1 + Q_2$ est la charge de S_{2ext}.

1.2) Calculons V_1' :

D'après le théorème de superposition on a :

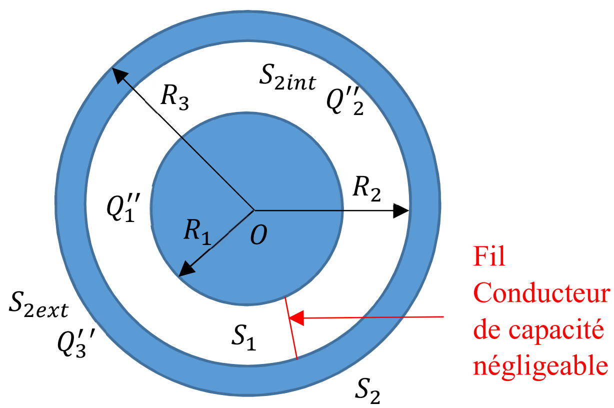
$$V_1' = V(O) = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_3'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

Car le potentiel est une fonction continue et que la charge à l'intérieur de S_1 est nulle, $\Longrightarrow$ $E_{s1int} = 0 \Longrightarrow V_1' = cte$.

En utilisant les expressions de Q_1', Q_2' et Q_3' ; on obtient :

$$V_1' = V(O) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

2)



2.1) Répartition des charges

La nouvelle répartition des charges Q_1'', Q_2'' et Q_3'' successivement sur les surfaces S_1, S_{2int}, S_{2ext} est donnée par :

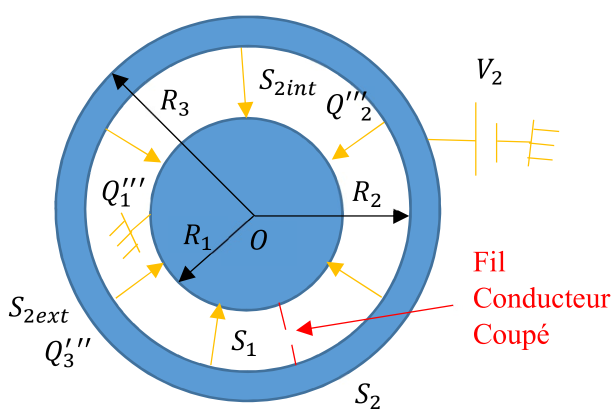
On a, les conducteurs S_1 et S_2 sont reliés fortement par un fil conducteur de capacité négligeable. Et l'ensemble semble comme un seul conducteur, alors les charges se répartissent sur sa surface extérieure. D'où :

$Q_1'' = Q_2'' = 0$ et $Q_3'' = Q_1 + Q_2$

2.2) Calculons V''_1 :

$$V(S_1) = V(S_2) = V_1'' \Leftrightarrow V_1'' = V(O) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

3)



3.1) Répartition des charges

On a les lignes de champ sont dirigées toujours vers les potentiels décroissent c.à.d vers S_1.

S_1 porte une charge négative $Q_1''' = -q$ avec $q > 0$

S_{2int} et S_1 en influence totale car S_1 est toujours à l'intérieur de S_2.

$$Q_1''' = q$$

Et S_{2ext} sera chargé par Q_3'''

3.2) Déterminons $\vec{E}(M)$ et $V(M)$

D'après la raison de symétrie, on a une symétrie sphérique, alors :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$$

Selon Gauss, on a :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

- **Pour $R_1 < r < R_2$**

$$E(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Et

$$\vec{E}(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

Calculons V(M) :
On a :

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}V(r)$$

Donc

$$V(r) = -\int E_r(r)\, dr$$

$$V(r) = -\int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1$$

Et on a $V_1(R_1) = 0$ donc $-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + C_1 = 0$

Donc :

$$C_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Finalement :

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$V_2 = V(R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

3.3) Les charges en fonction de V_2

On a :

$$V_2 = V(R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$q = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1 V_2}{R_2 - R_1} > 0$$

Donc :

$Q_1''' = -q$ et

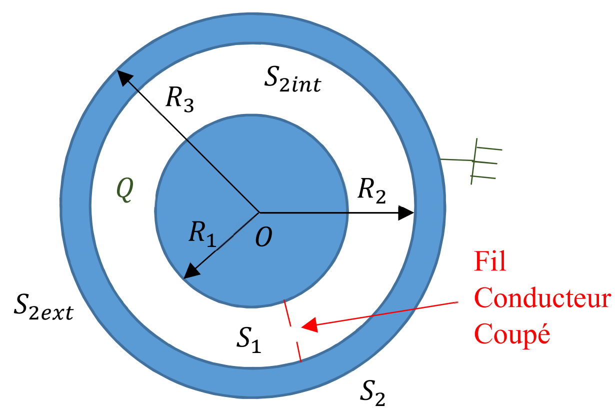
$$Q_2''' = q$$

On a aussi :

$$V_{r>R_3}(r) = \frac{Q_3'''}{4\pi\varepsilon_0 r} \Longrightarrow V(R_3) = V_2 = \frac{Q_3'''}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$\Longrightarrow Q_3''' = 4\pi\varepsilon_0 R_3 V_2$$

4)



4.1) Répartition des charges

S_1 porte une charge Q> 0

Pour S_2 on a :

S_{2int} et S_1 en influence totale car S_1 est toujours à l'intérieur de S_2, alors :

$$Q_{2int} = -Q$$

Et que S_2 est lié au sol alors :

$$Q_{2ext} = 0$$

Le champ entre $\vec{E}$ entre S_1 et S_2. selon Gauss on a :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

4.2) Calculons V_1

$$V_1 = V(O) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

Calculons la capacité :

On a :

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2 R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

Calculons l'énergie emmagasiné :

On a :

$$W_e = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_{12})$$

Avec $V_2 = 0$

$$W_e = \frac{1}{2}QV_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}Q^2\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

4.3) La densité d'énergie

$$\frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Et

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint E^2 dV$$

En coordonnées sphérique : $dV = r^2 sin\theta d\theta d\varphi dr$

Donc :

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2}$$

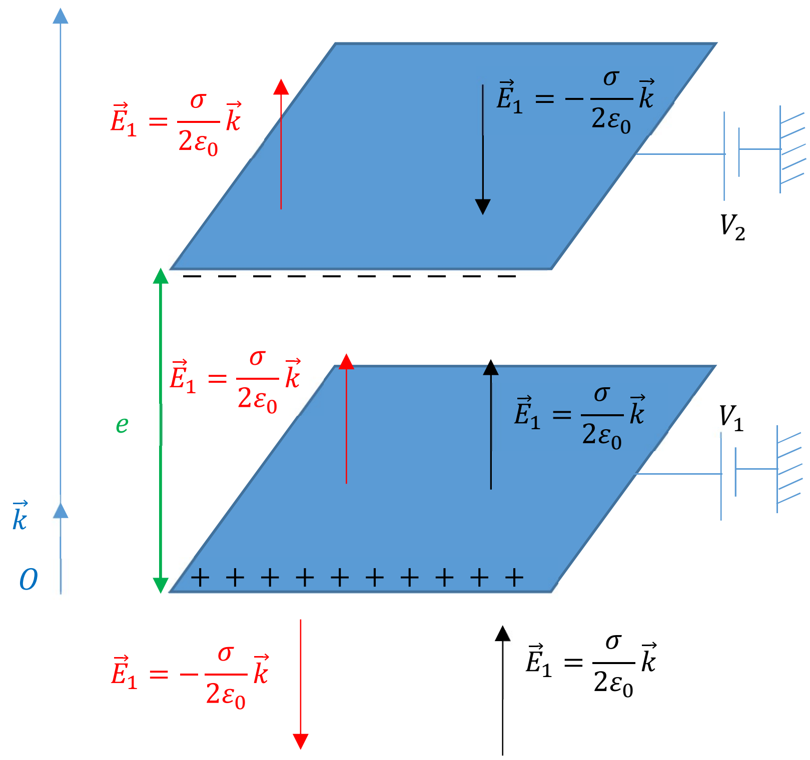
$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} r^2 \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2} dr$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}\right)$$

Exercice 4:



1) Calcul du champ

Selon le théorème de superposition on a $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$, et on a deux :

- Entre les deux plans

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}\end{aligned}$$

Et on :$Q = \sigma.S$
Alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{k}$$

- A l'extérieur des deux plans

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

2) Calcul de la d.d.p

On a :

$$V_1 - V_2 = -\int_{A_1}^{A_2} \vec{E}.\vec{dl}$$

$$V_1 - V_2 = -\int_{A_1}^{A_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 e} dz$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} Se$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

3) Calcul de W_e :

$$W_e = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) = \frac{Q^2 e}{2\varepsilon_0 S} = \frac{S^2 \sigma^2 e}{2\varepsilon_0 S}$$

$$W_e = \frac{\sigma^2 Se}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2 v}{2\varepsilon_0}$$

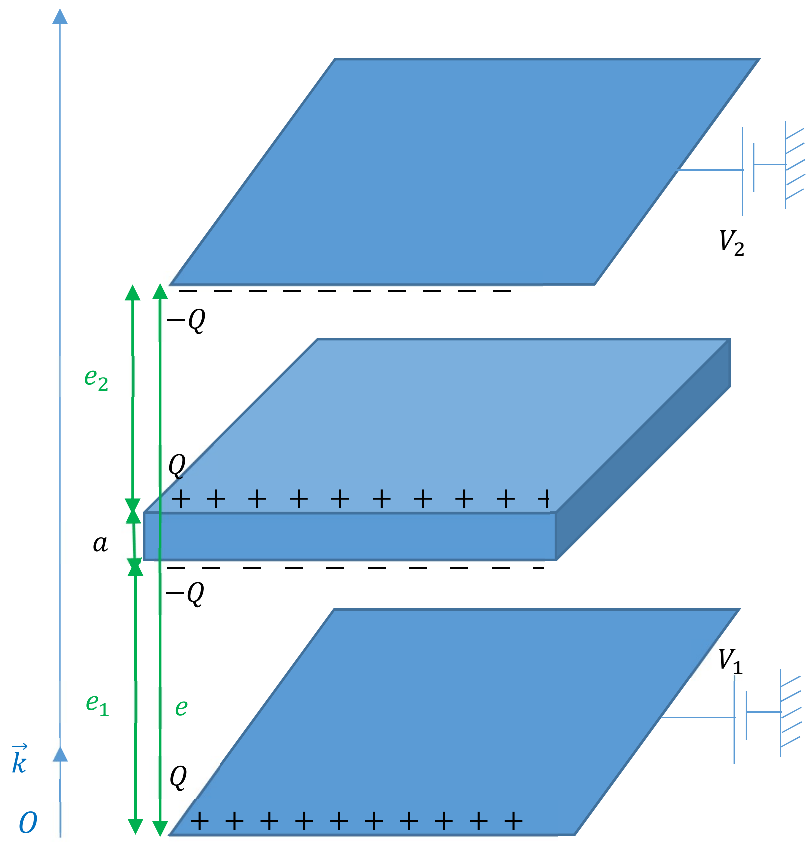
v est le volume entre les deux plans

Densité d'énergie

A partir de l'équation précédente, on vérifie facilement que:

$$\frac{dW_e}{dv} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

4) Capacité du condensateur équivalent



A_1 et A_2 Sont en influence totale avec les faces inférieur et supérieures de la plaque.

Le condensateur équivalent est la mise en série de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 et avec :

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{e_1}$$

Et

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{e_2}$$

On a :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{e_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{e_2}{\varepsilon_0 S}$$

Donc :

$$C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{S}{e_1 + e_2}$$

$$C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{S}{e - a}$$