Chapitre 4: Variable Aléatoire Continue (suite)

AMAL Youssef

1441/2020

Contexte : Si une v.a. X représente le temps requis pour obtenir un premier succès ou le temps entre deux succès consécutifs, alors X obéit à une distribution exponentielle. La loi exponentielle est utilisée pour mesurer par exp. : des temps d'attente, des temps de service, des durées de vie...

Loi Exponentielle : On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ positif, noté par $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda} & si\ x > 0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Fonction de répartition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x\lambda} & si\ x > 0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Espérance et Varaiance : $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

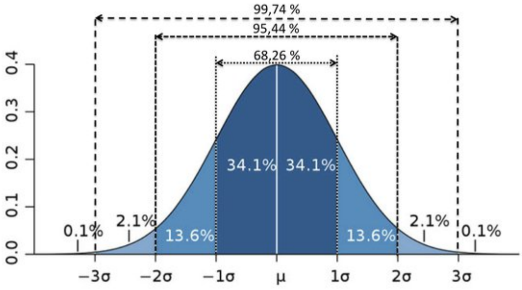
Proposition : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ Alors : $P(X > t+s|X > t) = P(X > s)$ pour tout s et t positives (*sans mémoire*).

Exemple : Le samedi soir, entre 20h et 21h, sur la route entre A et B, il y a en moyenne 5 accidents de la route. Un samedi soir particulier, entre 20h et 21h,

1. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 10 accidents sur cette route.
2. Si l'on sait qu'un accident vient tout juste de se produire sur cette route, calculer la probabilité qu'il faille attendre plus de 10 minutes avant qu'il s'y produise un autre accident.

Contexte :

- La loi normale est apparue comme limite de certaines lois de probabilités (*Théorème Central Limite*).
- La loi la plus naturelle pour modéliséer les phénomènes continus qui fluctuent de manière aléatoire autour d'une valeur moyenne μ, tels que une grande proportion des résultats groupés autour de la moyenne et de moins en moins lorsqu'on s'en éloigne.



Loi Normale : Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. On dit que X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2, noté par $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

On dit que X suit la loi normale centrée réduite, si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Espérance et Varaiance : $E[X] = \mu$ et $V[X] = \sigma^2$.

Fonction de Répartition :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
- Impossible de l'exprimer par des fonctions usuelles.
- Pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $x \geq 0$, $F_X(x)$ est approchée numériquement. Les valeurs de $F_X(x)$ sont stockées dans la table suivante :

Les autres cas possibles sont déduites à partir des propriétés suivantes :

1. $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
2. $P(X \geq x) = 1 - F_X(x)$.
3. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
4. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
5. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

Exemple : Une machine fabrique des rondelles de métal dont le diamètre est distribué normalement avec une moyenne de $2,4$ cm et un écart type de $0,05$ cm.

1. Des rondelles produites par cette machine, trouvons la proportion de celles dont le diamètre :
   - **a)** excède $2,5$ cm,
   - **b)** n'excède pas $2,32$ cm,
   - **c)** est compris entre $2,35$ cm et $2,46$ cm.
2. Trouvons la valeur de x telle que 5% des rondelles présentent un diamètre qui lui est supérieur.

Théorème Central Limite : Soit (X_n) une suite de variables indépendantes identiquement distribuées. On pose : $\mu = E[X_1], \sigma^2 = V[X_1]$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $Y_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors le processus $(Y_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. En d'autres termes : $P(Y_n \leq x) \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{t^2}{2}} dt$.

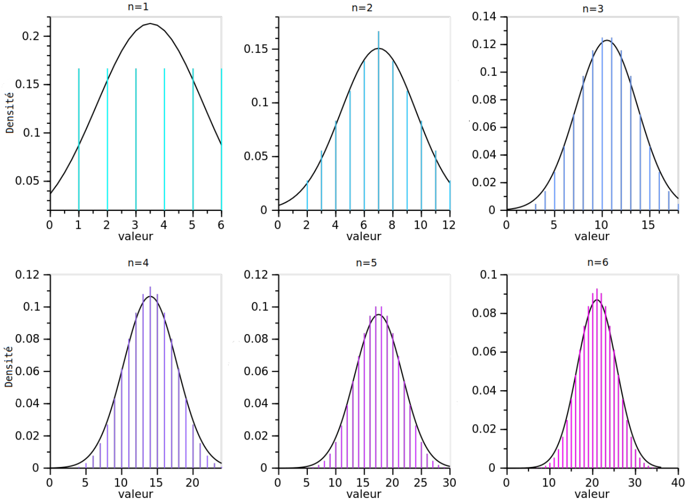
Exemple : On lance un dé 100 fois. Quelle est la probabilité que la somme des résultats soit entre 340 et 360 ?

Table de la loi normale centrée réduite $X \sim N(0,1)$

Pour t donné, la table fournit

$$P(X \leq t) = \Phi(t)$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986


n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6
Densité
Densité
valeur
valeur
valeur
valeur
valeur
valeur