Exercice 5

On définit la suite de fonction (u_n) par:

$$u_n(x) = \begin{cases} x^{n+1}\ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. u_n est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle admet un extremum. On trace le tableau de variation on trouve que son minimum est atteint en $x = e^{\frac{-1}{n+1}}$ et a pour valeur $\dfrac{-1}{e(n+1)}$.

2. On a pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $(-u_n(x))_n$ est positive et décroit vers 0 par CSSA et majoration du reste par $\dfrac{1}{e(n+1)}$. On en déduit que la série $\sum(-1)^n u_n$ CVU sur $[0,1]$.

3. On a pour $x \in]0,1[$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \ln(x)\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}\ln(x)$$

On a $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(x)}{1-x}x = -1$. Or $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} u_n(x) = 0$ et chaque u_n est continue sur $[0,1]$, si de plus la série $\sum u_n$ CVU sur $[0,1]$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to 1^-} u_n(x)$. Ce qui est absurde.

Exercice 6

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$

1. Si $x > 1$, la suite numérique $(\dfrac{1}{\ln(nx)})_{n\geq 1}$ est positive et décroit vers 0 par critère de Leibniz et la linéarité; la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ CVS sur $]1,+\infty[$. D'où f est bien définie sur $]1,+\infty[$.
D'aprés la majoration du reste

$$\forall n \geq 1,\ \forall x > 1, \quad |R_n(x)| \leq |\frac{(-1)^n}{\ln((n+1)x)}| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ donc la suite des restes (R_n) CVU vers 0 sur $]1,+\infty[$ c-à-d $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ CVU sur $]1,+\infty[$ et comme chaque fonction $x \longrightarrow \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Par régularité, f est bien continue sur $]1,+\infty[$.

2. La série étant alternée donc
$$0 \leq |f(x)| \leq |\frac{(-1)^0}{\ln(x)}| = \frac{1}{\ln(x)}$$
alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ou bien on peut intervertir limite et somme)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1^+} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)} = \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{x\to 1^+} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)} \in \mathbf{R}$$
alors $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

3. On pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ pour $x > 1$
On a f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ (quotient d'une constante et d'une compose de polynônome et ln) telle que $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}$. Par CSSA et majoration du reste on montre que la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CVU sur $]1, +\infty[$. Et comme la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVS sur $]1, +\infty[$, on conclut par théorème de dérivation terme à terme que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et on a:
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}$$
Par suite f' (série altérnée) est de signe de son premier terme $-\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$, donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

<u>Exercice 7</u> (Fonction Zeta)

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbf{R}$ définie par la formule
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$ car $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^s}$ est une série de Riemann.
Soit $n \geq 3$ et si $1 < s < t$ on a
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^s} > \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^t}$$
Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ on a
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^s} \geq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^t}$$
Or
$$1 + \frac{1}{2^s} > 1 + \frac{1}{2^t}$$
par sommation on trouve que $\zeta(s) > \zeta(t)$. On conclut que ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

2. Chaque fonction $s \longrightarrow \dfrac{1}{n^s}$ est continue (fonction puissance) sur $]1, +\infty[$.
   Si $s \in]1, +\infty[$, il existe un réel $a \in]1, s]$ telle que

$$\forall t \in [a, +\infty[, \quad |\frac{1}{n^t}| \leq \frac{1}{n^a}$$

   Comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^a}$ est convergente (série de Riemann $a > 1$), donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^s}$ CVN implique CVU sur $[a, +\infty[$ par conséquant la somme ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

3. la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^s}$ CVU sur $[a, +\infty[$ et chaque terme admet une limite finie en $+\infty$ alors

$$\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{1^s} + \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + 0 = 1$$

4. Soit un entier $k \geq 1$ et $s > 1$, on a :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}$$

   Par intégration sur $[k, k+1]$

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}$$

   Par sommation et relation de Chasles on trouve:

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$$

   puis on aura

$$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \dfrac{1}{s-1}$

5. Utiliser le théorème de dérivation terme à terme pour montrer que ζ est de classe C^1 puis de classe C^2.

$$\zeta''(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^s} > 0$$

   La fonction ζ est convexe sur $]1, +\infty[$.