Université Abdelemalek Essaadi
ENSA Tanger

Séries entières

Pr. HAMI Youssef

Département Mathématique et Informatique

19 *Mars* 2020

Module : Analyse 4
Coordinateur de Module : Pr. HAMI Youssef
Bibliographie :

- **Mathématiques : cours et exercices résolus. Tome 3. E. Azoulay, J. Avignant et G. Auliac.**
- **Analyse 4. Séries de Fourier, Séries entières, Intégrales multiples. Claude Servien. Ellipes.**
- **Mathématiques : Méthodes et exercices MP. Jean-Marie Monier. Collection J'intègre. Edition Dunod.**
- **Précis d'analyse MP. D.Guinin et B. Joppin. Edition Bréal.**
- **www.maths-france.fr**
- **www.bibmath.net**

Plan

Plan

Série entière

Définition

La série entière associée à la suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Exemple

- Pour $z = 0$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0$.
- La série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge sssi $|z| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

Lemme d'Abel

Si $\exists z_0 \in \mathbb{C}/\{0\}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < |z_0|$; la série $\sum a_n z^n$ CVA.

Définition

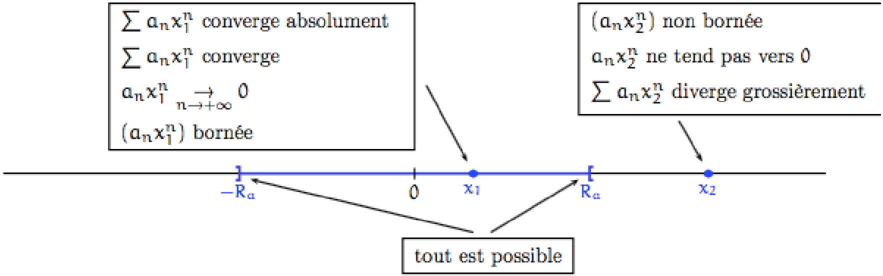
On définit le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ par :

$$R_a = \sup\{r \geq 0,\ (a_n r^n) \text{ soit bornée}\}$$

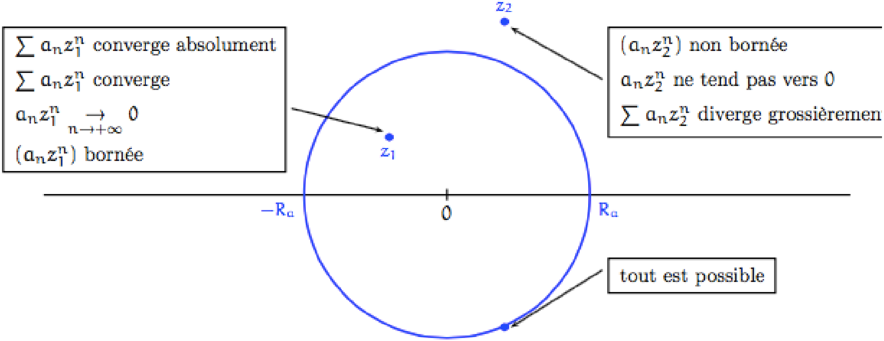
Corollaire

1. $R_a = 0$; $\forall z \in \mathbb{C}^*$ la série $\sum a_n z^n$ DV.
2. $R_a = +\infty$; $\forall z \in \mathbb{C}$ la série $\sum a_n z^n$ CVA.
3. $\forall z \in D(0, R_a)$(Disque ouvert de convergence) ; la série $\sum a_n z^n$ CVA.
4. $|z| > R_a$; la série $\sum a_n z^n$ DV.
5. $|z| = R_a$; on ne peut rien dire.

Résumé dans $\mathbb{R}$



Résumé dans $\mathbb{C}$



Calcul du rayon de convergence d'une série entière

Régles

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

- Régle d'Alembert :

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \in [0, +\infty], \text{ alors } R = \frac{1}{L}.$$

- Régle de Cauchy :

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty], \text{ alors } R = \frac{1}{L}.$$

Exemples

Exercices

1. $\sum \frac{z^n}{n^2}$ CVA sssi $|z| \leq 1$.
2. $\sum nz^n$ CVA sssi $|z| < 1$.
3. $\sum \frac{z^n}{n}$ est
   (a) CVA si $|z| < 1$.
   (b) DV si $|z| > 1$ et $z = 1$.
   (c) Semi-Cvte si $|z| = 1$ et $z \neq 1$.
4. $\sum \frac{z^n}{n!}$ CVA sur $\mathbb{C}$.

Exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Opérations sur les séries entières

Théorème

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ alors $\quad D(0, R_a) \subset D_f \subset D_f(0, R_a)$

Proposition

Soit $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b respectivement.

- La série-somme $(A+B)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence
$$R_s \geq \min(R_a, R_b)$$
- La série-produit $(A \times B)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ a pour rayon de convergence
$$R_p \geq \min(R_a, R_b)$$

Exemples

Remarque

Si $R_a \neq R_b$ alors $R_s = \min(R_a, R_b)$

Exercices

1. Montrer que si $a_n = 2^{-n} - 1$ et $b_n = 1$ alors $R_a = R_b = 1$ et $R_s = 2$
2. Établir que $(\sum_{n=0}^{\infty} z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} z^n) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ avec $R_a = R_b = R_p = 1$
3. Supposons que $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ et $B(z) = 1 - z$.

   Déterminer R_a et R_b puis montrer que $R_p = +\infty$. L'inégalité est-elle stricte ?

Application

- $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$,
- $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
- $\mathrm{ch}(z) = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$,
- $\mathrm{sh}(z) = \dfrac{e^{z} - e^{z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Plan

Convergence normale

Théorème

Si $R_a > 0$ alors $\forall r \in]0, R_a[$,
la série de fonctions $\sum a_n z^n$ CVN sur $D_f(0, r)$.

En effet

Si $|z| \leq r$ alors

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$$

Corollaire

Si $R_a > 0$ alors la fonction somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0, R_a)$.

Dérivation terme à terme

Proposition

On considére deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, si $b_n = a_{n+1}$ alors $R_a = R_b$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, si $b_n = na_n$ alors $R_a = R_b$

Théorème

Si $R_a > 0$, pour tout $x \in]-R_a, R_a[$, la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R_a, R_a[$ et la dérivée de f s'obtient par dérivation terme à terme :

$$f'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$$

De plus, le rayon de la série dérivée est R_a.

Dérivation terme à terme

Remarques

1. f est de classe C^∞
2. Pour tout entier naturel non nul p :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p}$$

3. Ce théorème reste valable pour les séries entières complexes :

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe) sur $D(0, R_a)$.

Cas complexe

Soient $(z, z_0) \in D(0, R)^2$, on pose $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On a $\dfrac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(z)$ avec $v_n(z) = a_n \sum_{k=1}^{n} z^{n-k} z_0^{k-1}$

Pour $r \in]0, R[$ telle que $(z, z_0) \in D_f(0, r)^2$

$$|v_n(z)| \leq n|a_n|r^{n-1}$$

$\sum v_n(z)$ CVN sur $D_f(0, r)$ donc sa somme est une fonction continue.

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

Intégration terme à terme

Théorème

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$. Alors pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

La série entière ainsi obtenue par intégration terme à terme a le même rayon de convergence que la série initiale.

Exemples

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ et $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Plan

Merci pour votre attention