Chapitre 3 : Couple de variables aléatoires

Prof. SABIL

ENSA de TANGER
Master Cybersécurité & Cybercriminalité
Matière : Probabilités

Pour I-1) Voir cours séance : 11/03/2020

Début 6ème séance

Definition I.1 (Th. de transfert pour les couples de v.a.)

Soient (X, Y) un couple de v.a. et $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to g(x, y) \in \mathbb{R}$, alors :

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \bullet \text{ Cas discret :} \\ \displaystyle\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} g(x_i, y_i) P_{i,j} \\ \bullet \text{ Cas continu :} \\ \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\ \bullet \text{ Cas mixte :} \\ \displaystyle\sum_{i\in I}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x_i,y) f_Y(y) dy\right) P(X = x_i) \end{cases}$$

Les propriétés d'espérance pour une v.a. sont aussi valables pour deux v.a.

Soient (Ω, τ, P) un espace probabilisé et (X, Y) un couple de v.a. définies sur (Ω, τ) :

Definition I.2

Les lois marginales du couple (X, Y) sont des lois de X et de Y qui sont définies par :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad P_X(A) \begin{aligned}[t] &= P(X \in A, Y \in \mathbb{R}) \\ &= P((X, Y) \in A \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

de même

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad P_Y(B) \begin{aligned}[t] &= P(X \in \mathbb{R}, Y \in B) \\ &= P((X, Y) \in \mathbb{R} \times B) \end{aligned}$$

a) Lois marginales pour le cas discret :

$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}, \quad I \subset \mathbb{N}^*$
$Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}, \quad J \subset \mathbb{N}^*$
alors $P_X(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_j)$

Notation : $P_i = \sum_{j \in J} P_{ij}$

de même : $P_y(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P_{ij}$

b) Densités marginales pour le cas continu :

Dans ce cas, une densité marginale f_X de X est donnée par :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

et une densité marginale f_Y de Y est donnée par :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Exemple 1

Soit $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ *et le couple* (X, Y) *dont la loi* $P_{X,Y}$ *est donnée par :*

$X \backslash Y$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	a	$\frac{1}{2} - a$
$X = 1$	$\frac{1}{2} - a$	a

1. *Déterminer les lois marginales* P_X *et* P_Y*.*
2. *Peut-on retrouver* $P_{X,Y}$ *à partir de* P_X *et* P_Y *? Justifier.*

Corrigé de l'exemple 1

1. - Calcul du P_X :

$$\begin{aligned}
P_X(X=0) &= P_{X,Y}(X=0,Y=0)+P_{X,Y}(X=0,Y=1) \\
&= a+\frac{1}{2}-a \\
&= \frac{1}{2}. \\
P_X(X=1) &= P_{X,Y}(X=1,Y=0)+P_{X,Y}(X=1,Y=1) \\
&= \frac{1}{2}-a+a \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

- Calcul du P_Y :

$$\begin{aligned}
P_Y(Y=0) &= P_{X,Y}(X=0,Y=0)+P_{X,Y}(X=1,Y=0)\\
&= a+\frac{1}{2}-a\\
&= \frac{1}{2}.\\
P_Y(Y=1) &= P_{X,Y}(X=0,Y=1)+P_{X,Y}(X=1,Y=1)\\
&= \frac{1}{2}-a+a\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Non, car P_X et P_Y ne dépendent plus du paramètre a.

L'objectif est : connaitre la loi de $(U, V) = \varphi(X, Y)$ (avec $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application) sachant que la loi de (X, Y) est connue.

Definition II.1

Si φ est différentiable sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, alors la matrice jacobienne $J_\varphi(x, y)$ de φ est définie $\forall x, y \in D$ par :

$$J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

où $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$.
Le Jacobien de φ au point (x, y) est $\det(J_\varphi(x, y))$.

Theorem II.2 (Formule de changement de variables)

Soient (Ω, τ, P) *un espace probabilisé et un couple* (X, Y) *de v.a. de densité* $f_{X,Y}$ *et tels que :* $P((X, Y) \in D) = 1$ *où* D *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *Si* $\varphi : D \to \mathbb{R}^2$ *est continument différentiable et injective et si le jacobien de* φ *ne s'annule pas sur* D*, alors une densité du couple* $(U, V) = \varphi(X, Y)$ *qui est abs. continu est donnée par :*

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} |\det(J_\psi(u,v))| f_{X,Y}(\psi(u,v)) & \text{si } (u,v) \in \varphi(D) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'application $\psi : \varphi(D) \to D$ *est la réciproque de* φ.

Exemple 2

Soit $f_{X,Y}$ la densité conjointe d'un couple de variables aléatoires réelles (X, Y). On transforme le couple (X, Y) en couple de variables (R, θ) présentant les coordonnées polaires.
Déterminer la densité conjointe $f_{R,\theta}$ du couple (R, θ).

Corrigé de l'exemple 2

$$\varphi : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow]0,+\infty[\times[0,2\pi[\\ (X,Y) & \longmapsto (R,\Theta) \end{array}$$

alors

$$\psi = \varphi^{-1} : \begin{array}{ll}]0,+\infty[\times[0,2\pi[& \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ (R,\Theta) & \longmapsto (X,Y) \end{array}$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} X = R\cos(\Theta) \\ Y = R\sin(\Theta) \end{array} \right.$$

et $|\det(J_\psi(r,\theta))| = r$
d'où

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} rf_{X,Y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) & \text{si } (r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Fin 6ème séance : on inclut dans cette séance la suite du corrigé de la série 2 (voir fichier joint).