Université Abdelmalek Essaâdi **2019-2020**
Ecole Nationale des Sciences Appliquées ENSA de Tanger
Master Cybersécurité & Cybercriminalité. Pr SABIL

Probabilités : Corrigé TD 2

Exercice 1 : Déjà corrigé.

Exercice 2 : Déjà corrigé.

Exercice 3 : Déjà corrigé.

Exercice 4 :

1. Soit l'événement A : un serveur reçoit une requête durant une minute.
   Alors $P(A) = p$ et $P(\bar{A}) = 1 - p$ (Bernoulli).
   Soit X : v.a qui indique le nombre de requêtes reçues par n serveurs pendant une minute, alors :
   $X \rightsquigarrow B(n, p)$ c.à.d : $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^k$.

2. Puisque $X \rightsquigarrow B(n, p)$ alors d'après le cours :
   $E(X) = np$ et $Var(X) = np(1 - p)$.

Exercice 5 : La durée de vie d'un certain type de lampes suit une loi exponentielle de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la durée de vie de ces lampe (loi exponentielle) est sans mémoire.
   c.à.d. Montrons que : $\forall x, x_0 \geq 0 \quad P(X > x + x_0|_{X > x_0}) = P(X > x_0)$.
   On a d'une part :

$$\begin{aligned} P(X > x + x_0|_{X>x_0}) &= \frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)} \\ &= \frac{1 - F(x + x_0)}{1 - F(x_0)} \\ &= \frac{1 - \int_0^{x+x_0} \lambda e^{-\lambda t} dt}{1 - \int_0^{x_0} \lambda e^{-\lambda t} dt} \\ &= \frac{1 - [-e^{-\lambda t}]_0^{x+x_0}}{1 - [-e^{-\lambda t}]_0^{x_0}} \\ &= e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - P(X \leq x) \\ &= 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= 1 - [-e^{-\lambda t}]_0^x \\ &= e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

D'où la loi exponentielle est sans mémoire.

2. D'après le cours : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
3. D'après les données : $P(X \leq 7000) = \dfrac{1}{2}$
   c.à.d $\displaystyle\int_0^{7000} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2}$,
   alors $[-e^{-\lambda t}]_0^{7000} = \dfrac{1}{2}$
   d'où $\lambda = \dfrac{ln(2)}{7000}$,
   or, on sait que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, donc $E(X) = \dfrac{7000}{ln(2)} = 10098,86 \geq 10^4$, par conséquent, l'annonce du fabriquant est vraie.