Cours d’Automatique Non-Linéaire

1ère année du Cycle Ingénieur
GSEA

Préparé par:
Pr. L. El Menzhi

METHODE DE CYPKIN

Contrairement à la méthode du 1er harmonique qui s'applique à tous les systèmes non-linéaire en présence ou en absence des oscillations, la méthode de cypkin, qui sera présentée dans ce chapitre, est destinée à **l'étude des oscillations des asservissements par plus ou moins.**

1- Introduction:

1.1 Problématique:

Les phénomènes des oscillations peuvent prendre naissance dans les systèmes asservis non-linéaires: Ceci peut limiter la précision de ces asservissement et peut introduire des vibrations.

Dans le cas particulier, ou l'élément non-linéaire est de type plus ou moins, le signal de commande de type carrée est suffisamment simple à traiter: ceci permet de résoudre le problème des oscillations de manière rigoureuse grâce aux travaux de Hamel et Cypkin.

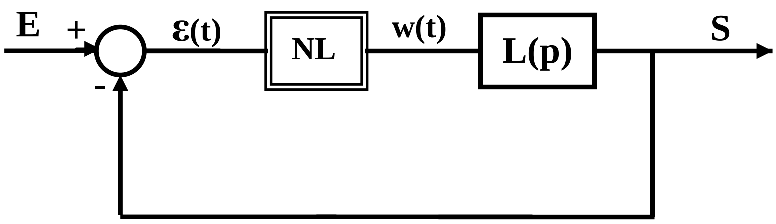
1.1 Principe de la méthode de Cypkin:

La méthode de Cypkin est une méthode harmonique basée non seulement sur les termes d'ordre 1 mais aussi des termes d'ordre supérieures à 1 (3ème et 5ème harmonique) de W(t). C'est une méthode plus fine que celle du 1er harmonique qui permet d'obtenir des résultats plus précis, mais qui ne s'applique qu'aux non linéarités de type relais.

2- Mise en équation de la méthode de Cypkin

2.1 Système non-linéaire

On considère le schéma fonctionnel d'un asservissement Non-Linéaire donné par la figure ci-dessous:

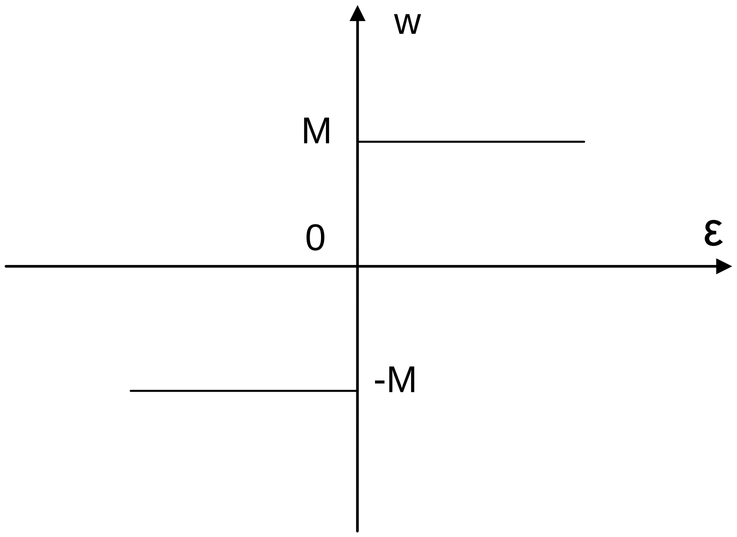


Ce schéma est appelé schéma fonctionnel du **Système asservi non linéaire canonique**

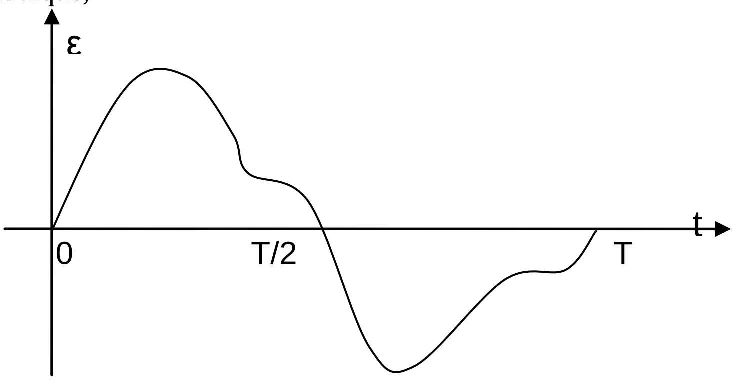
- L(p) étant la fonction de transfert des organes linéaires.
- NL est l'élément non-linéaire qui comporte un relais.

2.2 Cas d'un relais idéal :

Au cas ou ou la non-linéarité est un relais idéal ne comportant ni temps mort, ni hystérésis et qu'il est symétrique comme le montre la figure ci-dessous.

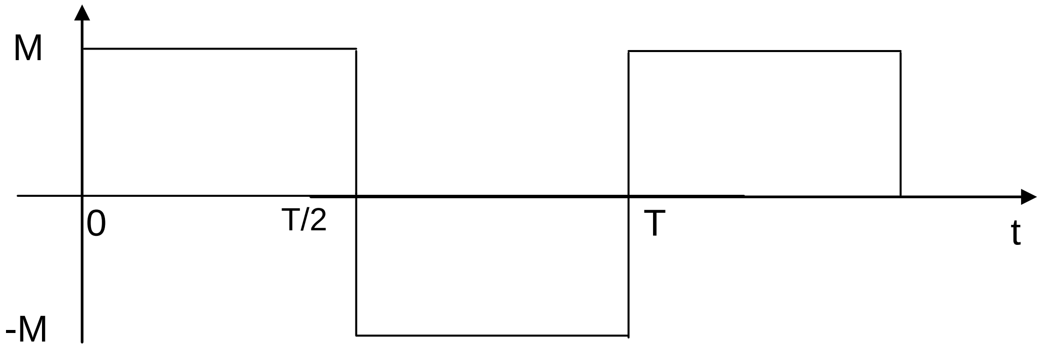


Supposons que le système oscille avec une pulsation ω. Le signal erreur est donné par une fonction périodique,



Tel que T=2π/ω et que les Oscillations sont supposées symétriques

Cette fonction périodique, de période T, est introduite dans le relais, dont la sortie est un signal carré. Soit W(t):



2.3 **Technique:**

La technique consiste à étudier le comportement du système lorsqu'il est le siège d'oscillations autonomes de pulsation ω correspondant à une période T=2π/ω. Pour cette raison :

- On cherche à identifier les instants auxquels se produit la commutation de l'élément non-linéaire.

- A partir de la connaissance de ces instants, on exprime les conditions de commutation en fonction de ε et de sa dérivée première dε/dt.
- On traduit ensuite géométriquement ces conditions dans le plan complexe définit par:

$$\wedge(\omega) = \frac{1}{\omega}.\frac{d\,\varepsilon}{dt} + j\,\varepsilon$$

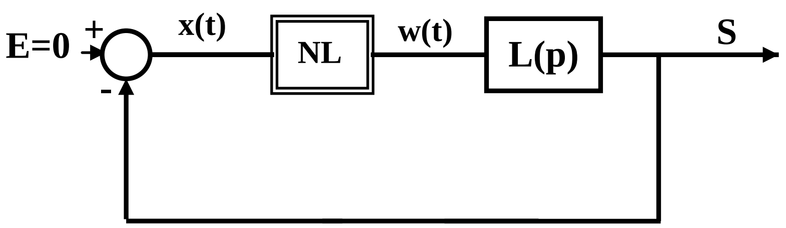
Remarque:

- Ces deux grandeurs ε et de sa dérivée première dε/dt s'expriment en fonction de ω puisque les signaux sont périodiques de période T=2π/ω.
- La courbe obtenue Λ(ω) est appelée lieu de Cypkin.

3- Système non-linéaire en régime autonome:

3.1 Schéma fonctionnel :

Soit le système non-linéaire ci-dessous:



C'est le schéma fonctionnel du **Système asservi non linéaire en régime autonome**

Dans ce cas, ε = x =-s,

3.2 Mise en équation d'une non-linéaire à relais idéal:

Puisque l'on étudie le système en régime autonome, on aura également:

$$\wedge(\omega) = -\frac{1}{\omega}.\frac{d\,s}{dt} - j\,s$$

Les conditions d'oscillations ou conditions de périodicité dans le cas d'un relais idéal:

$$\varepsilon(\frac{\pi}{\omega}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\,\varepsilon}{dt}(\frac{\pi}{\omega}) < 0$$

ces deux grandeurs sont en fonction de ω.

- Le signal carré W(t) peut être décrit à l'aide de la fonction d'Heaviside:

$$W(t) = M.u(t) - 2M.u\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) + 2M.u\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) - 2M.u\left(t - \frac{3\pi}{\omega}\right) + 2M.u\left(t - \frac{4\pi}{\omega}\right) + \cdots$$

Par développement en série de Fourier:

$$W(t) = \frac{4M}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \cdots\right) = \frac{4M}{\pi}\sum_{n=2k+1}\frac{\sin(n\omega t)}{n}$$

Avec n impair >0

- Pour les organes linéaires, on peut écrire: $L(j\omega) = A(\omega).\exp(j\,\phi(\omega))$
- Le système peut être représenté sous la forme suivante:

$$\frac{4M}{\pi}\sum_{n}\frac{\sin(n\omega t)}{n} \longrightarrow \boxed{A(\omega)\,\sin(\omega t + \phi(\omega))} \longrightarrow S(t)$$

- Par application du théorème de superposition, la sortie sera donc:

$$s(t) = \frac{4M}{\pi}\left(A(\omega)\,\sin(\omega t + \phi(\omega)) + \frac{A(3\omega)}{3}\sin(3\omega t + \phi(3\omega)) + \frac{A(5\omega)}{5}\sin(5\omega t + \phi(5\omega)) + \cdots \right)$$

Par la suite:

$$s(t) = \frac{4M}{\pi}\sum_{n\ impair}\frac{1}{n}A(n\omega)\,\sin(n\omega t + \phi(n\omega))$$

Ceci donne:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4M}{\pi}\omega\sum_{n\ impair}A(n\omega)\,\cos(n\omega t + \phi(n\omega))$$

Puisqu'on étudie le système en régime autonome on aura pour e(t)=0, $\varepsilon(t) = -s(t)$.

Donc, les conditions d'oscillations peuvent s'écrire:

$$\varepsilon\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -s\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{4M}{\pi}\sum_{n\ impair}\frac{A(n\omega)}{n}\sin[\phi(n\omega)] = 0$$

Alors que:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{ds}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{4M}{\pi}.\omega.\sum_{n\ impair}A(n\omega)\,\cos[\phi(n\omega)] < 0$$

On traduit ensuite géométriquement ces conditions dans le plan complexe par la fonction:

$$\wedge(\omega) = \frac{1}{\omega}.\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) + j\,\varepsilon\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$$

Sa représentation dans le plan complexe conduit au lieu de Cypkin qui est gradué en ω.

3.3 <u>Lieu critique:</u>

$\frac{\pi}{\omega}$ Correspond au premier instant de commutation (changement d'état) correspondant au 1er franchissement de ε=x du seuil 0.

Au cas ou la non-linéarité est un relais idéal le lieu critique ε_s est le demi-axe réel négatif.

<u>4- Construction graphique du lieu de Cypkin et stabilité:</u>

Il est très difficile de tracer le lieu de Cypkin à partir des expressions précédentes. Le diagramme est obtenu par les méthodes numériques par ordinateur.

4.1 Théorème:

Le système est le siège d'oscillations spontannées si et seulement si il existe au moins un point d'intersection entre le lieu de Cypkin et la droite d'équation $\varepsilon=\varepsilon_s$ ou ε_s est la valeur seuil correspondant à la première commutation observable.

Remarque:

- Dans le cas ou la non linéarité est un relais à caractère idéal ε_s est le demi-axe réel négatif.

- Le point d'intersection P_0 du lieu de Cypkin avec ce demi-axe réel négatif correspond à une oscillation.

4.2 Procédure:

On trace dans le plan complexe, le lieux des points d'affixes $\Lambda(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. La courbe obtenue est appelée le lieu de Cypkin. On trace sur le même diagramme la droite d'équation $\varepsilon=\varepsilon s$.

4.3 Lieu de Cypkin à partir du lieu de transfert:

Le lieu de Cypkin peut être déduit à partir du lieu de transfert L(jω) au facteur 4M/π près. Il suffit de tenir compte du 3ème et du 5ème harmonique de L(jω) définie par:

$$L(j\omega)= U(\omega) + j\, V(\omega)$$

Procédure:

En effet: Le lieu de Cypkin est donc:

$$\wedge(\omega) = \frac{4M}{\pi}.\sum U(n\omega) + j\,\frac{4M}{\pi}.\sum \frac{1}{n}V(n\omega)$$

Ceci donne:

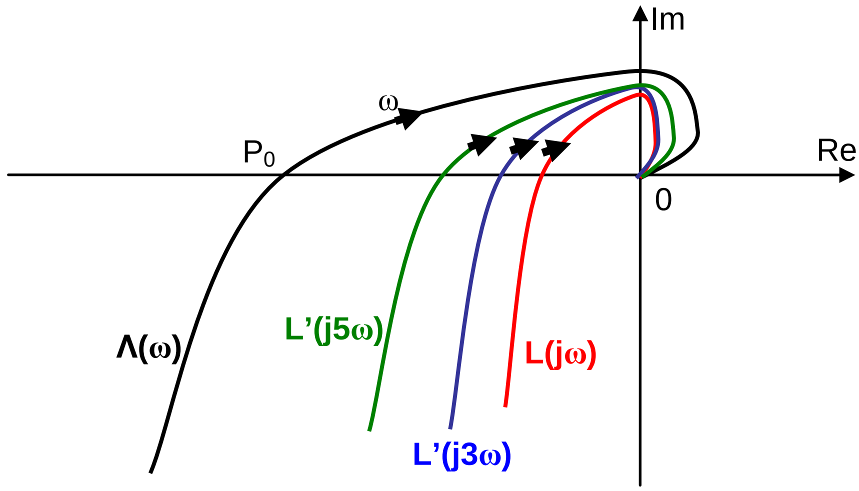
$$\frac{\pi}{4M}\wedge(\omega) = \sum U(n\omega) + j\,\sum \frac{1}{n}V(n\omega)$$

$$\frac{\pi}{4M}\wedge(\omega) = U(\omega)+ j\,V(\omega)+U(3\omega)+ j\,\frac{V(3\omega)}{3}+U(5\omega)+ j\,\frac{V(5\omega)}{5}$$

C'est la somme de **3** lieux: L(jω), L'(j3ω) et L'(j5ω)

- **L'(j3ω)** est déduit de **L(j3ω)** en divisant sa partie imaginaire par **3**.
- **L'(j5ω)** est déduit de **L(j5ω)** en divisant sa partie imaginaire par **5**.

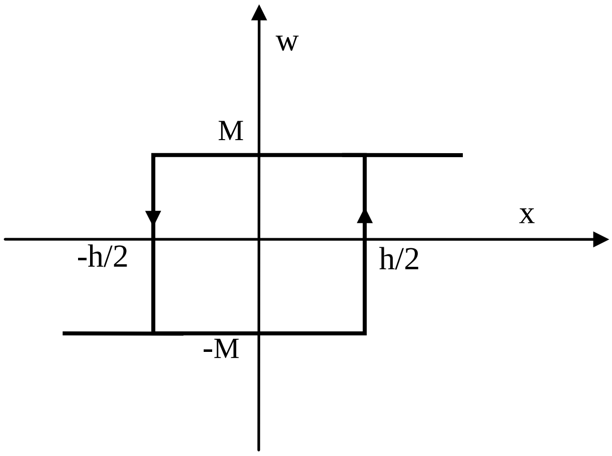
Le lieu de Cypkin est donc déduit au facteur 4M/π des 3 lieux précédents



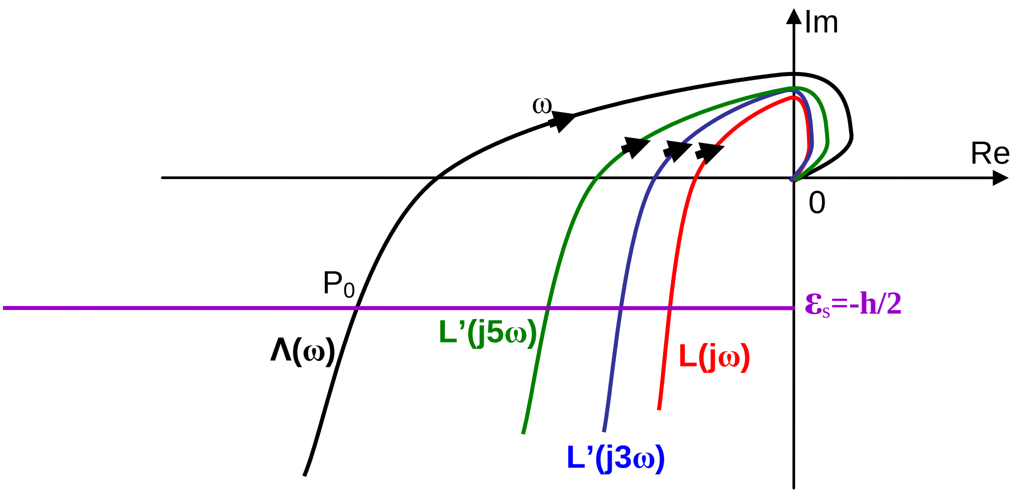
On trace dans le plan complexe, le lieux des points d'affixes Λ(ω) lorsque ω varie de 0 à +∞.

4.4 Cas d'une non-linéaire à relais avec hystérésis:

Au cas ou ou la non-linéarité est un relais avec hystérésis et qu'il est symétrique comme le montre la figure ci-dessous.



Dans ce cas, ε_s= - h/2 qui représente la droite de la 1ère commutation (changement d'état) partant de 0. C'est le demi-axe de partie réelle négative et de partie imaginaire - h/2.



Λ(ω) = Lieu de Cypkin

Le lieu de Cypkin peut être déduit à partir du lieu de transfert L(jω) au facteur 4M/π près. Il suffit de tenir compte du 3ème et du 5ème harmonique de L(jω) définie par:

$$L(j\omega) = U(\omega) + j\,V(\omega)$$

Le lieu de Cypkin est donc:

$$\wedge(\omega) = \frac{4M}{\pi}.\sum U(n\omega) + j\,\frac{4M}{\pi}.\sum \frac{1}{n} V(n\omega)$$

Les conditions d'oscillations ou conditions dans le cas d'un relais avec hystérésis deviennent:

$$\varepsilon\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{h}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \langle\, 0$$

Dans ce cas, π/ω représente le premier instant de commutation correspondant au 1er franchissement de $\varepsilon=x$ du seuil -h/2.

4.5 <u>Stabilité selon Cypkin</u>

- La présence d'une oscillation ne signifie pas obligatoirement qu'il y a instabilité du système au sens de la divergence de son état.

- Les oscillations spontannées restent stables (bornées) si l'intersection entre $\Lambda(\omega)$ et la droite εs se fait de bas en haut lorsque $\Lambda(\omega)$ ε est parcouru dans le sens des ω croissantes. Dans le cas contraire, le système est dit instable.

<u>Remarque:</u>

Les oscillations des systèmes présentés ci-dessus sont stables selon Cypkin.

4.6 <u>Comparaison des conditions d'oscillation dans le lieu de Cypkin et par la méthode du 1er harmonique:</u>

Dans cette partie nous allons présenter une comparaison des conditions d'oscillation dans le lieu de Cypkin et dans le cas de la méthode du 1er harmonique:

* **<u>1ère condition:</u>** (quelque soit le type du relais)

$$\frac{4M}{\pi} . \sum U(n\omega) = 0$$ dans le lieu de Cypkin

<u>* 2ème condition:</u>

Cas d'un Relais idéal:

$$\frac{4M}{\pi} . \sum \frac{1}{n} V(n\omega) = 0$$ dans le lieu de Cypkin

$$\frac{4M}{\pi} V(\omega) = 0$$ Par la méthode du 1er harmonique

Cas d'un Relais avec hystérésis:

$$\frac{4M}{\pi} . \sum \frac{1}{n} V(n\omega) = -\frac{h}{2}$$ dans le lieu de Cypkin

$$V(\omega) = \frac{-\pi h}{8M}$$ Par la méthode du 1er harmonique

<u>Remarques:</u>

- La méthode de Cypkin représente un inconvénient majeur par rapport à la méthode du 1er harmonique c'est qu'elle nous renseigne uniquement sur la fréquence des oscillations et non pas sur son amplitude.
- Plus la fréquence des oscillations est importante plus l'erreur commise par l'approximation du 1er harmonique est faible.
- Le lieu de Cypkin tend vers le lieu de transfert, lorsque la fréquence tend vers l'infini.