ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAÂDI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tanger

المملكة المغربية
جامعة عبد المالك السعدي
المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية
طنجة

TRANSFERTS THERMIQUES

TD : Séries 1 (suite) et 2

2020

Pr. El Fadar

17/03/2020

Série 1 (suite)

Solution Ex 6

1. Bilan thermique pendant l'intervalle dt

$$\underbrace{P\,dt}_{\text{chaleur produite}} = \underbrace{C\,dT}_{\text{chaleur stockée}} + \underbrace{\frac{T(t)-T_0}{R}\,dt}_{\text{chaleur perdue}} \qquad \text{(J)}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{RC} = \frac{1}{C}\left(P + \frac{T_0}{R}\right) \qquad (1)$$

2. La solution générale de l'éq.(1) s'écrit : $T(t) = A\,e^{-\frac{t}{RC}} + T_1$

$T_1 = T_0 + RP = 5 + 2.10^{-2}.2000 = 45\,°C$ est une solution particulière de l'éq.(1)

$T(t=0) = T_0 = 5°C \Rightarrow A = T_0 - T_1 = -RP = -40\,°C$

$\Rightarrow T(t) = T_1 - RP\,e^{-\frac{t}{\tau}} = 45 - 40e^{-\frac{t}{2400}}$ où $\tau = RC = 2400\,s = 0,66\,h$

Lorsque $t \gg 0,66\,h$, $T(t) = 45\,°C = Cte \Rightarrow$ régime permanent.

3. La température $T_{max} = 20\,°C$ est atteinte lorsque : $e^{-\frac{t_1}{2400}} = \frac{25}{40}$

$\Rightarrow t_1 = 2400 \ln \frac{40}{25} = 1128\,s = 18,8\ mn$

4. Lorsque la source est mise en arrêt entre t_1 et t_2, $l'éq\ (1)\ devient\ (P = 0)$:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{RC} = \frac{T_0}{RC}$$

dont la solution est : $\left[T\left(t = t_1\right) = T_{max} = 20°C\right]$

$$T(t) = A\,e^{-\frac{t}{RC}} + T_0 \quad avec \quad A = \left(T_{max} - T_0\right) e^{\frac{t_1}{RC}}$$

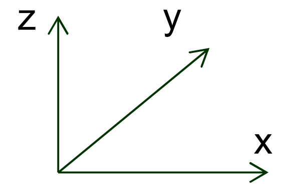
Soit $T(t) = T_0 + \left(T_{max} - T_0\right) e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} = 5 + 15\,e^{-\frac{(t-t_1)}{2400}}$

La température $T_{min} = 18\,°C$ est atteinte lorsque $18 = 5 + 15\,e^{-\frac{\left(t_2 - t_1\right)}{2400}}$

soit $t_2 - t_1 = 343\,s = 5,72\,mn$

<u>Série 2</u>

Solution problème



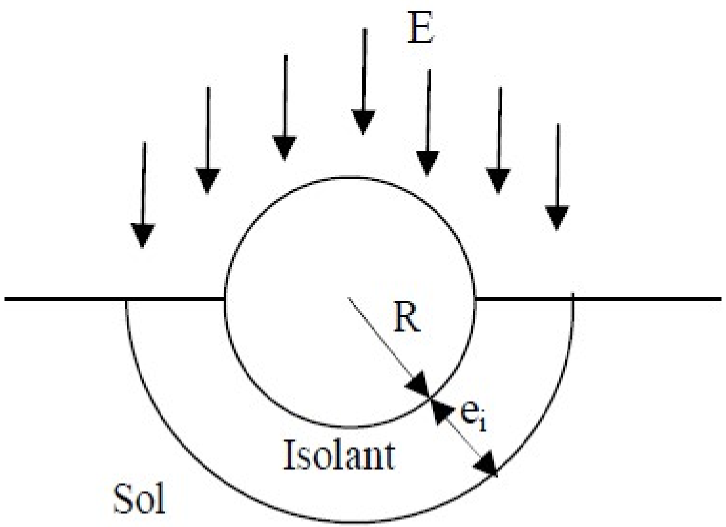


Fig.1

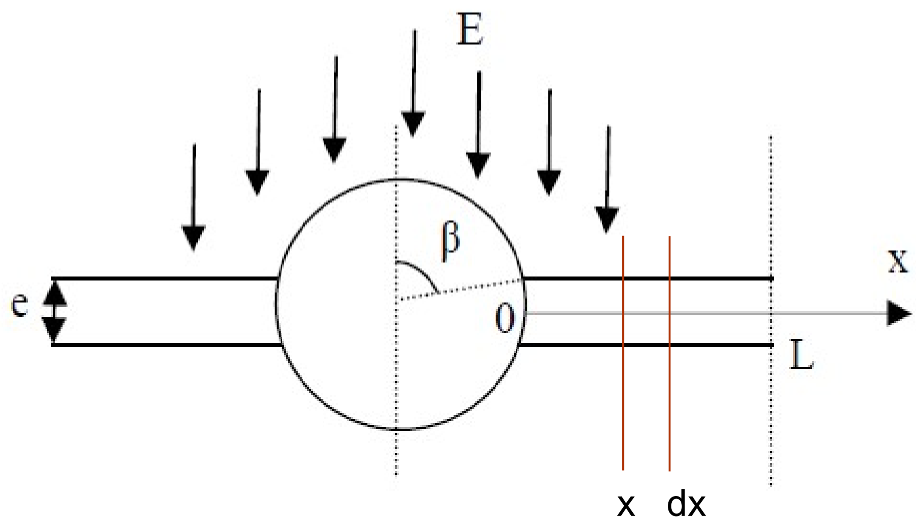


Fig.2

1)- Le bilan thermique s'écrit : $E.2Rl = h\pi Rl\left(T_p^0 - T_e\right) \quad (W)$

d'où : $T_p^0 = T_e + \dfrac{2E}{\pi h}$ A.N : $T_p^0 = 54°C$

2)- Le bilan thermique s'écrit :

$$E.2Rl = h\pi Rl\left(T_p^1 - T_e\right) + \frac{T_p^1 - T_s}{\ln 2 / \pi l \lambda_i} = h\pi Rl\left(T_p^0 - T_e\right)$$

soit : $T_p^1 = \dfrac{m \ln 2 T_p^0 + T_s}{m \ln 2 + 1}$ avec $m = \dfrac{hR}{\lambda_i} = \dfrac{15.10^{-2}}{10^{-1}} = 1,5$

3)- a) Ecrivons le bilan thermique (flux entrant = flux sortant) pour une tranche de largeur l et de longueur dx (on supposera que l'isolation dans les bords en y=0 et y=l est parfaite):

$$-\lambda le\left(\frac{dT}{dx}\right)_x + Eldx = -\lambda le\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} + hldx\left(T - T_e\right) \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h}{\lambda e}\left[T - \left(T_e + \frac{E}{h}\right)\right] = 0$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - \alpha^2\theta(x) = 0 \quad (1) \text{ avec } \quad \alpha^2 = \frac{h}{e\lambda}$$

où $$\theta(x) = T(x) - T_R \quad \text{et} \quad T_R = T_e + \frac{E}{h}$$

T_R serait la température de la plaque si elle était isolée sur ses bords. $\left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_x = \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} = 0\right]$

Cette température ne pourra donc pas être atteinte, on en déduit que:

$$\theta(x) = T(x) - T_R < 0$$

AN : T_R= 73,3°C

b)- La solution de l'éq. (1) est : $\theta(x) = Ach(\alpha x) + Bsh(\alpha x)$

:

à l'aide des C.I : $T(x=0)=T_p$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = 0$ (par raison de symétrie)

On obtiendra A et B : $A = T_p - T_R$ et $B = -\left(T_p - T_R\right) th\alpha L$

Soit : $$\frac{T(x) - T_R}{\left(T_p - T_R\right)} = \frac{ch(\alpha x)ch(\alpha L) - sh(\alpha x)sh(\alpha L)}{ch(\alpha L)} = \frac{ch\left[\alpha\left(L - x\right)\right]}{ch(\alpha L)}$$

4) a)- Le bilan énergétique sur un élément [–R,L] s'écrit :

$$E\left(R+L\right)l = h\left(T_p - T_e\right)\beta R l + \int_0^L h\left(T(x) - T_e\right) l\,dx$$

$$\Rightarrow E\left(R+L\right) = h\left(T_p - T_e\right)\beta R + \int_0^L h\left(\left(T_p - T_R\right)\frac{ch\left[\alpha\left(L-x\right)\right]}{ch(\alpha L)} + T_R - T_e\right)dx$$

D'où : $$T_p = T_e + \frac{E}{h}\left[\frac{1+\left(th\alpha L/\alpha R\right)}{\beta+\left(th\alpha L/\alpha R\right)}\right]$$ $$\left[T_R = T_e + \frac{E}{h}\right]$$

b)- α et β sont donnés par :

$$\alpha = \sqrt{\frac{h}{e\lambda}} = \sqrt{\frac{15}{2.10^{-3}.75}} = 10m^{-1} \qquad \text{et} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{e}{2R} = 1,47\,\text{radian}$$

$$A.N: \qquad T_p = 20 + \frac{800}{15}\left[\frac{1+\left((th10.0,142)/10.10^{-2}\right)}{1,47+\left((th10.0,142)/10.10^{-2}\right)}\right] = 70,9\,°C$$

$$T(x) = T_R + \left(T_p - T_R\right)\frac{ch\left[\alpha\left(L-x\right)\right]}{ch(\alpha L)} \Rightarrow T(L) = T_R + \frac{\left(T_p - T_R\right)}{ch(\alpha L)}$$

$$A.N: \qquad T(L) = 73,3 + \frac{(70,9-73,3)}{ch(10.0,142)} = 72,2\,°C$$

c)- Le flux traversant le plan d'abscisse x=0 est donné par :

$$\phi_P = \phi(x=0) = -\lambda el\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \alpha\lambda el\left(T_P - T_R\right)th(\alpha L) < 0$$

A.N : $\phi_P = 10.75.2.10^{-3}.1.\left(70,9-73,3\right)th(10.142.10^{-3}) = -3,2\,W$

Sans ailettes, ce flux était de :

$$\phi_0 = \frac{T_p^0 - T_e}{\dfrac{1}{h\dfrac{\pi}{2}Rl}} = \frac{54-20}{\dfrac{1}{15.\dfrac{\pi}{2}.10^{-2}.1}} = 8\,W$$ (sens inverse que ϕ_P)

La présence des plaques (ailettes) entre les tubes permet d'augmenter le flux collecté de 40%.

5) a)- Bilan thermique en régime permanent pour une longueur (dy) du tube :

$$h_F \underbrace{2\pi R dy}_{\text{surface d'échange}} \left(T_p - T_F\right) = \underbrace{\rho v \pi R^2}_{\text{débit massique de l'eau}} c_p dT_F \Rightarrow h_F 2\pi R\left(T_p - T_F\right)dy = \rho c_p v \pi R^2 dT_F$$

D'où : $\dfrac{d\left(T_F - T_p\right)}{\left(T_F - T_p\right)} = -\dfrac{2h_F}{\rho c_p v R}dy \Rightarrow T_F(y) - T_p = A\exp\left(-\dfrac{2h_F}{\rho C_p v R}y\right)$

Pour y=0, $T_F = T_F(0) = 15$ °C donc $A = T_F(0) - T_P$

Soit : $\dfrac{T_F(y) - T_p}{T_F(0) - T_p} = \exp\left(-\dfrac{2h_F}{\rho c_p v R}y\right) = \exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)$ avec : $\delta = \dfrac{\rho c_p v R}{2h_F}$

A.N : $\delta = \dfrac{10^3.4{,}18.10^3.10^{-2}.10^{-2}}{2.200} = 1{,}045\,m$; $T_F(l) = 48{,}86$ °C

b)- Sans plaques, $T_p = 54$ °C ; $T_F(l) = 39$ °C

Les plaques du collecteur permettent d'augmenter la température de sortie du fluide (d'environ 25%).