Description de la matière

1. Modélisation et Algorithmes de Programmation linéaire (PL)

2. La programmation Linéaire en nombres entiers et binaires :
   Méthode de séparation & évaluation (Brunch and Bound)

3. Problème de transport : Algorithme de Steeping Stone

4. Problème d'affectation des taches : Algorithme de Konig

5. Optimisation dans les réseaux :

   * Problème du plus court chemin : Algorithme de Dijkstra

   * Problème du flot maximum : Algorithme de Ford Fulkerson

   * Problème du flot max à cout min

Outils pédagogiques : Cours, TD et TP sous Matlab et Solveur Excel

Programmation Linéaire

Méthodes de Résolutions :

1. **Graphique :** dimension 2 ou 3

2. **Dénombrement :**

Trop long pour certains problèmes.

3. **Algorithme de Simplexe:**

Très efficace pour plusieurs problèmes pratiques.

Un programme linéaire (PL) est un problème du type :

Maximiser $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; \quad i = 1,\ldots m \\ x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ;$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad et \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad ,$$

Le programme linéaire peut alors s’écrire :

Max $\left(Z =< c, x >\right)$ sous les contraintes

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- La fonction $Z = \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ est dite fonction économique .
- Les variables x_j sont appelées *variables structurelles .*

Il est possible de présenter les contraintes d’un (PL) sous forme d’égalités en introduisant des variables dites variables d’écart t_i :

On obtient le programme linéaire sous forme standard suivant :

Max $(Z = \langle c, x \rangle)$ sous les contraintes

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \ , \ t \geq 0 \end{cases}$$

- **Solution** : tout n-uplet $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$

satisfaisant à $Ax = b$.

- **Solution réalisable** : toute solution

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ satisfaisant à $\bar{x} \geq 0$.

- **Solution optimale** : toute solution réalisable

qui optimise la fonction économique .

- **Base** :

B une matrice carrée d'ordre $m \times m$. (formée par des colonnes de A).

On dit que B est une base du programme

linéaire (PL) si la matrice B est inversible .

Solution de base :

A=(B,N)   et   x=(x_B , x_N)

$$\bar{x}_B = (B)^{-1} b$$

$$\bar{x}_N = 0$$

Solution de base réalisable : toute

solution de base $\bar{x}$ satisfaisant à $\bar{x} \geq 0$.

Méthode Graphique:

Théorème 1

L'ensemble des solutions réalisables d'un

programme linéaire détermine un ensemble

convexe appelé domaine réalisable qui est :

i) Soit l’ensemble vide ,

ii) Soit un ensemble polyédrique convexe non borné ,

iii) Soit un polyèdre convexe .

Théorème 2

S’il existe au moins une solution optimale

(finie).

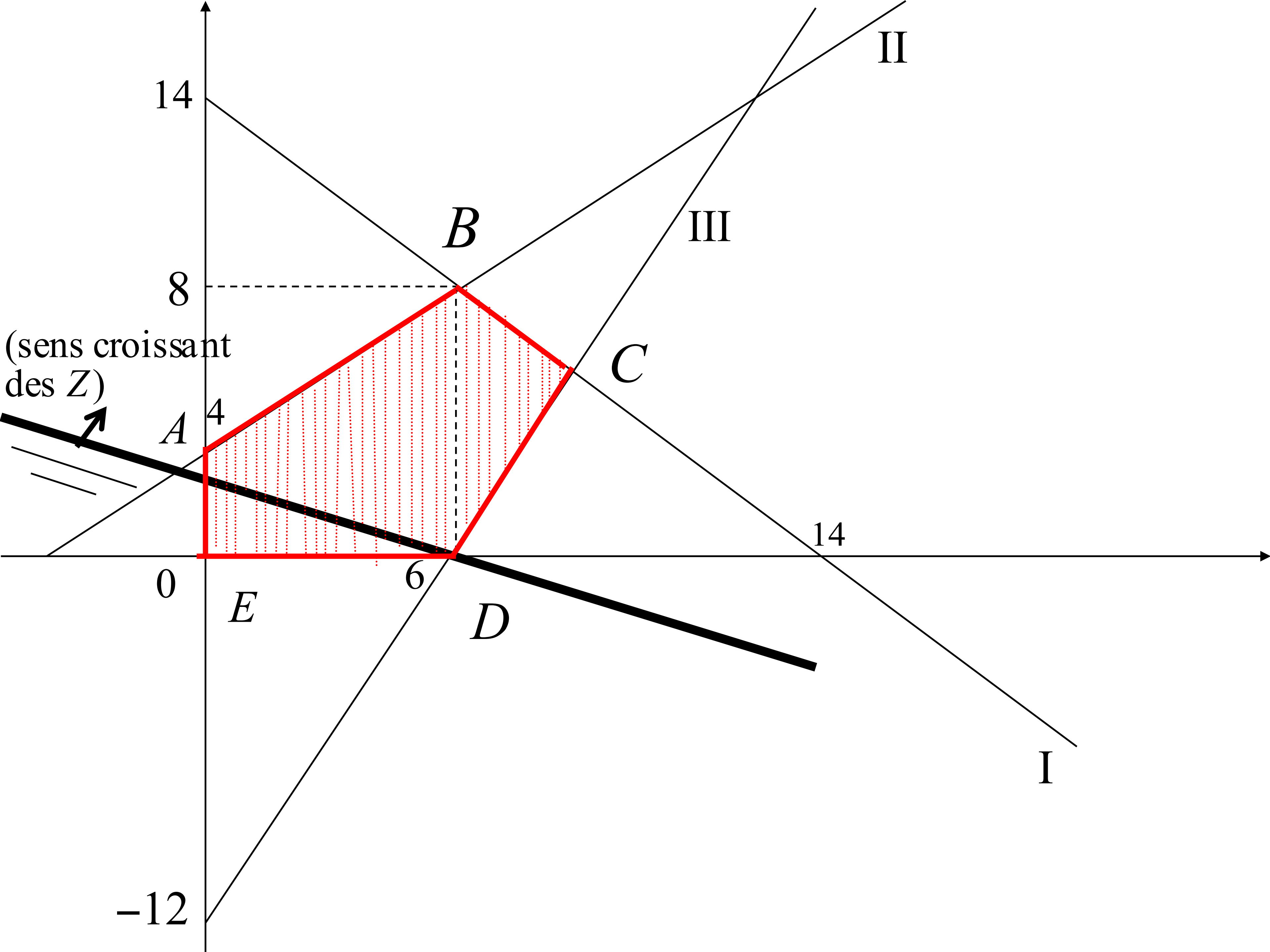
$$\Downarrow$$

il existe au moins une solution optimale qui est un point extrême du domaine réalisable .

Exemple:

Max $(Z = x_1 + 3x_2)$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$



14
8
4
0
6
14
−12
(sens croissant
des Z)
A
B
C
D
E
I
II
III

Il s’agit de trouver, parmi les points

appartenant à l’ensemble hachuré, celui

dont les coordonnées maximisent Z .

On fait glisser la droite « Z » jusqu'au dernier point d'intersection avec le domaine convexe

La solution optimale est donc le sommet B

de coordonnées $(6,8)$, pour lequel $Z = 30$.

Méthode de Dénombrement

Théorème :

L'ensemble des points extrêmes d'un polyèdre

convexe $X = \left\{ x \in IR^n \;/\; Ax = b \;,\; x \geq 0 \right\}$ correspond

à l'ensemble des solutions de bases réalisables .

Étape (1) : trouver toutes les solutions de base du PL .

Étape (2) : sélectionner les solutions de base réalisables .

Étape (3) : calculer en chaque solution de base réalisable la valeur de la fonction économique Z .

Exemple :

Le programme sous forme standards s'écrit:

Max$\left(Z = x_1 + 3x_2\right)$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ x_1 ; x_2 ; t_1 ; t_2 ; t_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solutions de base	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
s_1	0	0	14	12	12
s_2	0	14	0	-30	26
s_3	0	4	10	0	16
s_4	0	-12	26	48	0
s_5	14	0	0	40	-16
s_6	-6	0	20	0	24
s_7	6	0	8	24	0
s_8	6	8	0	0	8
s_9	26/3	16/3	0	40/3	0
s_{10}	12	12	-10	0	0

Solutions de base réalisables	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
S_1	0	0	14	12	12
S_3	0	4	10	0	16
S_7	6	0	8	24	0
S_8	6	8	0	0	8
S_9	26/3	16/3	0	40/3	0

On calcule la valeur de la fonction économique

en chaque solution de base réalisable :

Solutions de base réalisables	s_1	s_3	s_7	s_8	s_9
Z	0	12	6	30	74/13

La solution optimale est s_8 .

Algorithme du simplexe :

Méthode permettant de voir si le programme

linéaire a au moins une solution réalisable

et, si oui, elle fournit une solution optimale

après un nombre fini d'itérations.

Principe de l’Algorithme du Simplexe :

1. Déterminer une première solution de base réalisable.

2. Cheminer de solution de base réalisable en solution de base réalisable en augmentant (cas du max) à chaque itération la valeur de la fonction économique.

3. Arrêter l’algorithme lorsqu’il n’est plus possible d’accroître la valeur de la fonction économique .

Définition :

On dit que le Programme Linéaire Standard

est écrit sous forme Canonique (PLSC) par

rapport à une base réalisable B , si:

1. La matrice B est une permutation près, la matrice identité I_m .

2. Les coûts c_j associés aux variables de base $x_j,\ j \in \{1....m\}$,sont nuls.

$$\text{Max}\left(Z = \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j\right) \text{ sous les contraintes}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \ddots \quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots x_n \geq 0 \end{cases}$$

$J = \{1,\ldots,m\}$ base réalisable .

c_j : coefficient de x_j dans la fonction économique.

$$j \in \overline{J} = \{m+1, \quad , n\}$$

$\overline{x}_i$: valeur de la $i^{ème}$ solution de base considérée.

$$z_{\bar{J}} = < c_J , A^{\bar{J}} > .$$

$$\forall\, j \in \bar{J} \;:\; z_j = < c_J , A^j >$$

$$Z_J = < c_J , \bar{x}_J > = \sum_{i \in J} c_i \bar{x}_i$$ le coût correspondant à

la solution de base $(x_i)_{i \in J}$.

			c_1	$\cdots$	c_r	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
			Variables de base					Variables hors base				
Base (J)	c_J	$\bar{x}_J$	x_1		x_r		x_m	x_{m+1}		x_k		x_n
1	c_1	$\bar{x}_1$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	$a_{1,k}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
2	c_2	$\bar{x}_2$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	$a_{2,k}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
r	c_r	$\bar{x}_r$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$a_{r,m+1}$	$\cdots$	$a_{r,k}$	$\cdots$	$a_{r,n}$
m	c_m	$\bar{x}_m$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,k}$	$\cdots$	$a_{m,n}$
		$-Z_J$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$c_{m+1} - Z_{m+1}$	$\cdots$	$c_k - z_k$	$\cdots$	$c_n - z_n$

Tableau du simplexe

ORGANIGRAMME DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE

PL à maximum

↓

Mise des contraintes sous forme d'égalité

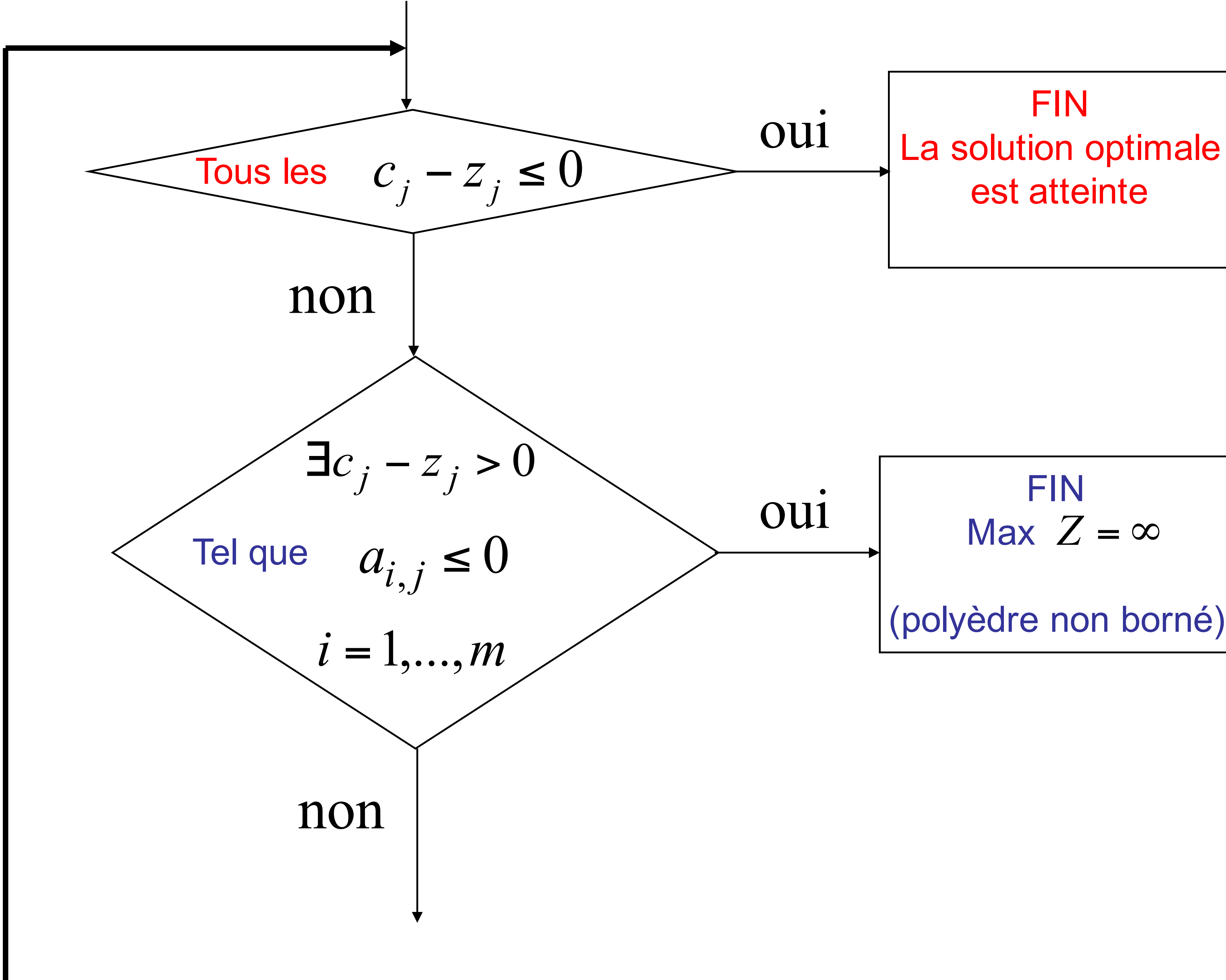
↓

Recherche d'une première solution de base réalisable

↓

Construction du premier tableau du simplexe

↓



Tous les $c_j - z_j \le 0$
oui
FIN
La solution optimale
est atteinte
non
$\exists c_j - z_j > 0$
Tel que $a_{i,j} \le 0$
$i = 1,\ldots,m$
oui
FIN
Max $Z = \infty$
(polyèdre non borné)
non

Changement de base

I. Détermination des vecteurs entrant et sortant

- x_k entre en base si $c_k - z_k = \max\left\{c_j - z_j \,\middle|\, c_j - z_j > 0\right\}$
- x_r sort de la base si $\dfrac{\bar{x}_r}{a_{r,k}} = \min\left\{\dfrac{\bar{x}_i}{a_{i,k}} \,\middle|\, a_{i,k} > 0\right\}$

II. Construction du nouveau tableau du simplexe selon la règle de rectangle

On peut résumer les règles permettant de construire un nouveau tableau simplexe de la façon suivante :

1. Ligne du pivot :

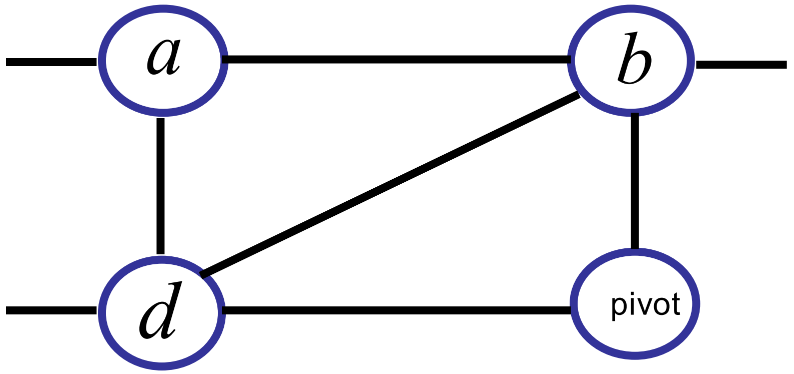
Pour obtenir la ligne du pivot transformé, il suffit de diviser tous les éléments par le pivot.

2. <u>Ailleurs :</u>

Pour obtenir la transformée a' de a

il suffit d'appliquer <u>la règle du rectangle :</u>

$$a' = a - \frac{b * d}{pivot}$$



Exemple

Max $(Z = x_1 + 3x_2)$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Max$\left(Z = x_1 + 3x_2\right)$ sous les contraintes

$$\begin{cases} t_1 + x_1 + x_2 = 14 \\ t_2 + -2x_1 + 3x_2 = 12 \\ t_3 + 2x_1 - x_2 = 12 \\ x_1 \; ; \; x_2 \; ; t_1 \; ; \; t_2 \; ; t_3 \geq 0 \end{cases}$$

Variables de base

			0	0	0	1	3
Base J	c_J	$\bar{x}_J$	t_1	t_2	t_3	x_1	x_2
t_1	0	14	1	0	0	1	1
t_2	0	12	0	1	0	-2	3
t_3	0	12	0	0	1	2	-1
		0	0	0	0	1	3

variables de base

			0	0	0	1	3
base J	c_J	$\bar{x}_J$	t_1	t_2	t_3	x_1	x_2
t_1	0	10	1	-1/3	0	5/3	0
x_2	3	4	0	1/3	0	-2/3	1
t_3	0	16	0	1/3	1	4/3	0
		-12	0	-1	0	3	0

variables de base

			0	0	0	1	3
base J	c_J	$\bar{x}_J$	t_1	t_2	t_3	x_1	x_2
x_1	1	6	3/5	-1/5	0	1	0
x_2	3	8	2/5	1/5	0	0	1
t_3	0	8	-4/5	3/5	1	0	0
		-30	-9/5	-2/5	0	0	0

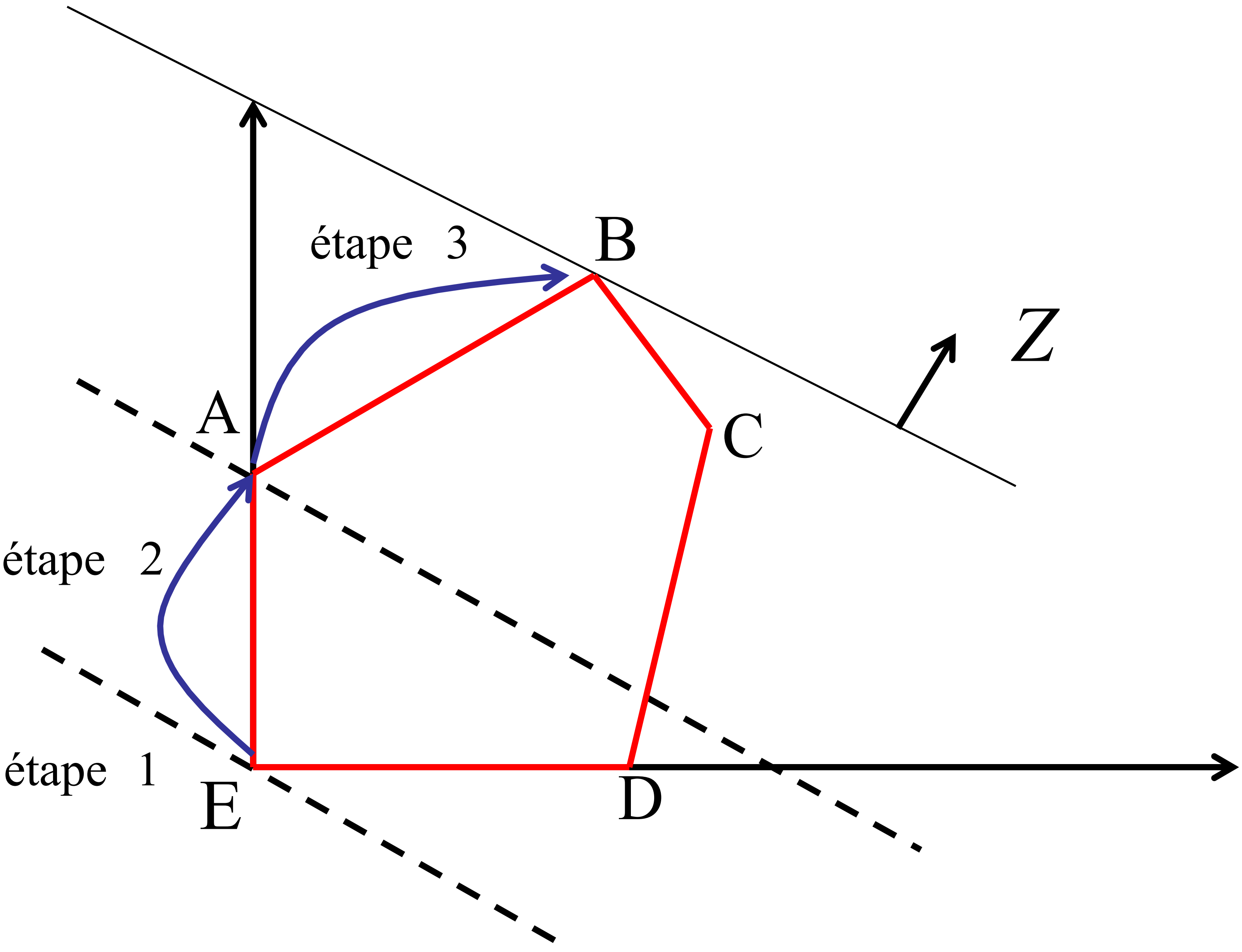
Puisque tous les $c_j - z_j$ sont non positifs, la

solution obtenue :

$$x_1 = 6 \;;\; x_2 = 8 \;;\; t_1 = t_2 = t_3 = 0.$$

est optimale, et la valeur maximum de Z

est 30 .



étape 3
B
Z
A
C
étape 2
étape 1
E
D

Conclusion

- La méthode du Simplexe est une procédure de calcul, qui évite le recensement de tous les extrêmes, en sélectionnant progressivement ceux qui donnent à la fonction économique une suite croissante de valeurs (cas de la recherche d'un maximum).

- La convergence du procédé est assurée par le fait que le nombre de sommets est fini.