Le problème du plus court chemin

Algorithme de DIJKSTRA

Le problème peut se formuler de la manière suivante. Etant donné un graphe $G = (X, \Gamma)$ ou à chaque arc est associée une longueur $d_{ij} \geq 0$, (X est l'ensemble des sommets et Γ l'ensemble des arc.

On veut déterminer un chemin allant du sommet origine *o* au sommet destination *d* tel que la **longueur du chemin parcouru soit minimum**.

Les arcs du graphe représentent, par exemple, les routes liant différentes localités et les longueurs des arcs, des distances en kilomètres. Mais ces longueurs peuvent aussi représenter des temps de parcours.

Algorithme de DIJKSTRA

Initialisation

K =0 : numéroter les sommets de 1 à n (n est le nombre des sommets).
On note par E l'ensemble des sommets choisis
Dans ce cas E={1}

On pose : D[j]= P(1,j), $j \notin E$, avec P(i,j) la longueur de l'arc (i,j) s'il existe

sinon P(i,j)=+ ∞ .

Itérations

Pour k= 1 à (n-1) faire :

1. On choisit $i \notin E$ tel que $D[i]= \min \{D[j] \,/\, j \notin E\}$
   $E \leftarrow E \cup \{i\}$.

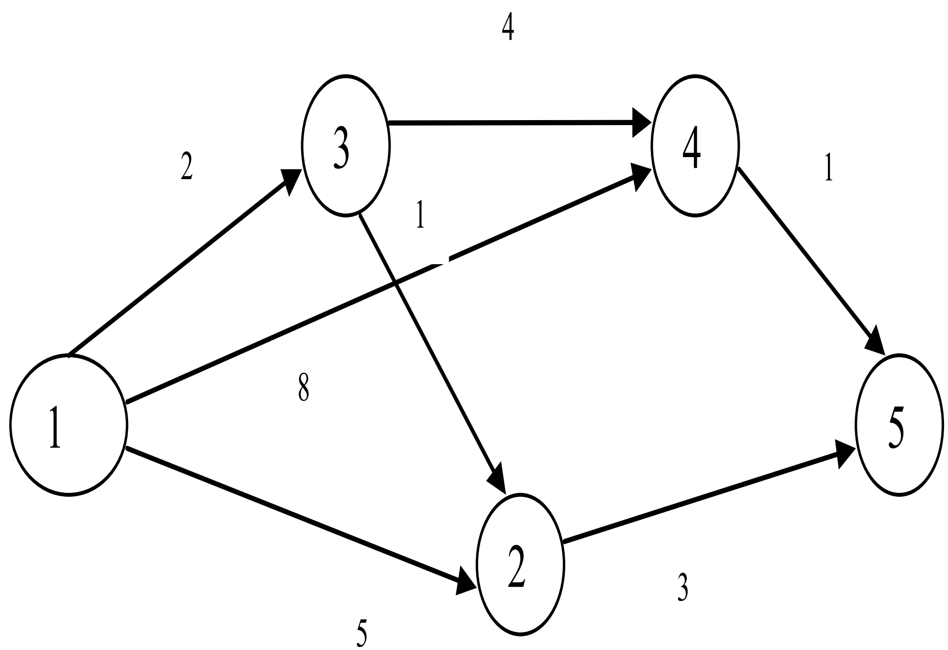
2. Pour chaque sommet $j \notin E$ calculer $D[j]=\min (D[j], D[i]+P(i,j))$

   revenir à 1) jusqu'à ce que E=X.

3. affichage du chemin minimum.

Application 1

Chercher le plus court chemin pour aller du sommet 1 au sommet 5.



Tableaux de l’exemple 1

Etape	E	D[1]	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
0	{1}	0	5	2	8	∞
1	{1,3}	0	3	2	6	∞
2	{1,3,2}	0	3	2	6	6
3	{1,3,2,4}	0	3	2	6	6
4	{1,3,2,4,5}	0	3	2	6	6

Le chemin optimal est donc 5 $\longrightarrow$ 2 $\longrightarrow$ 3 $\longrightarrow$ 1

Soit le chemin minimal parcouru : 2+1+3=6

Application 2:

Déterminer le plus court chemin entre le noeud 1 et le noeud 10 du graphe suivant :