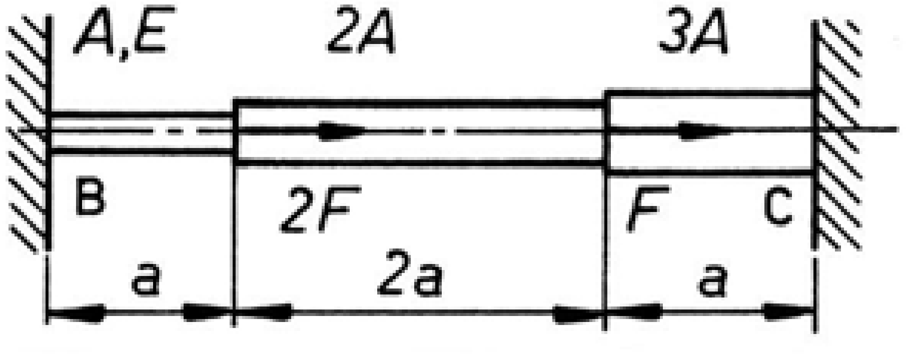
Exercice 2 :



Question 1 : Déterminer X_B en fonction de X_C et F.

Théorème de la résultante statique en projection sur la ligne moyenne :

$$X_B + 2F + F + X_C = 0$$

Donc :

$$X_B = -3F - X_C$$

Question 2 : Déterminer le torseur des efforts intérieurs pour chaque tronçon en fonction de X_C et F.

- Pour $x \in \{0;\, a\}$

$$\{\tau_{int}\} = {}_G\{\tau_{ext\to E_2}\}$$
$$= {}_G\left\{\begin{matrix}(3F + X_C)\vec{x}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

- Pour $x \in \{a;\, 3a\}$

$$\{\tau_{int}\} = {}_G\{\tau_{ext\to E_2}\}$$
$$= {}_G\left\{\begin{matrix}(F + X_C)\vec{x}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

- Pour $x \in \{3a\,;\,4a\}$

$$\{\tau_{int}\} = {}_G\{\tau_{ext\to E_2}\}$$

$$= {}_G\begin{Bmatrix} X_C\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Question 3 : Déterminer l'allongement des différents tronçons en fonction de X_C et F.

On a:

$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$ donc : $\Delta L = \dfrac{N\,L}{E\,S}$

Alors :

$$\Delta L_1 = \frac{(3F + X_C)a}{E\,A} \qquad \Delta L_2 = \frac{(F + X_C)2a}{E\,2A} = \frac{(F + X_C)a}{E\,A}$$

$$\Delta L_3 = \frac{X_C\,a}{E\,3A}$$

Question 4 : En déduire les actions de liaison X_B et X_C en fonction de F.

Encastrement en B et C alors :

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = 0$$

$$3F + X_C + F + X_C + \frac{X_C}{3} = 0$$

Alors :

$$X_C = -\frac{12}{7}F \qquad X_B = -\frac{9}{7}F$$

Question 5 : Déterminer alors les contraintes normales dans chacun des tronçons

On a :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Alors :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{9\,F}{7\,A} \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = -\frac{5\,F}{14\,A} \qquad \sigma_3 = \frac{N_3}{3A} = \frac{4\,F}{7\,A}$$

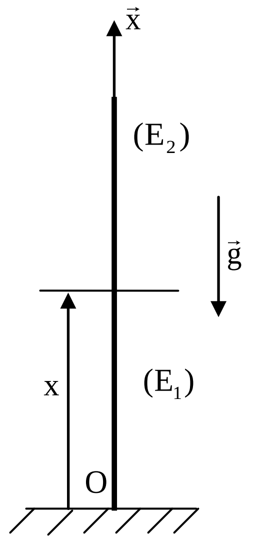
Question 6 : Déterminer Le déplacement des deux points d'application des forces axiales 2F et F.

$$u_1 = \Delta L_1 = \frac{9Fa}{7EA}$$

$$u_2 - u_1 = \Delta L_2 = -\frac{5Fa}{7EA} \quad \text{alors :} \qquad u_2 - u_1 = -\frac{5Fa}{7EA} + \frac{9Fa}{7EA} = \frac{4Fa}{7EA}$$

Exercice 3 : Détermination de la hauteur limite d'un bâtiment

Q.1 : Proposer le modèle pour une étude de RDM détaillant en particulier les conditions aux limites et le chargement.



Q.2 : Déterminer le torseur des efforts intérieurs dans une section droite quelconque de la poutre.

Pour : $x \in \{0, L\}$

$$\{\tau_{int}\} = {}_G\{\tau_{ext \to E_2}\} = {}_G\{\tau_{pes \to E_2}\}$$

Avec :

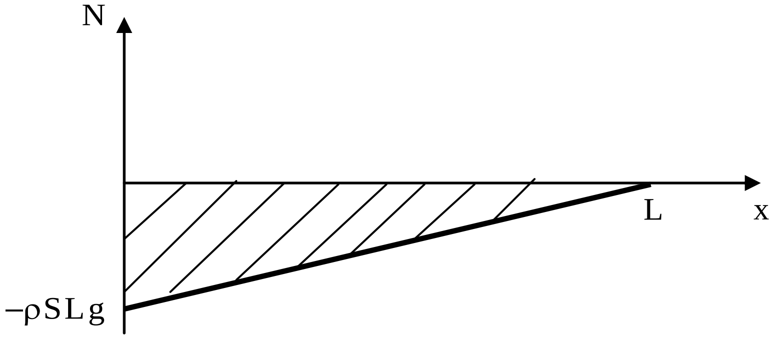
$${}_G\{\tau_{pes \to E_2}\} = {}_G\left\{\begin{matrix} \vec{R} = -m_{E_2}\, g\, \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

Et : $m_{E_2} = \rho S L$

Alors :

$$\{\tau_{int}\} = {}_{G}\begin{Bmatrix} -\rho S L g \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Q.3 : Tracer le diagramme des sollicitations et en déduire la nature des sollicitations à la quelle est soumise la poutre.



On a : $N = -\rho S L g \leq 0$, donc le pilier est soumis au compression

Q.4 : Déterminer la contrainte maximale à laquelle est soumise la poutre.

La contrainte est maximale est où la section est minimale S_L

$$\sigma_{max} = \frac{|N|_{max}}{S} = \frac{\rho S L g}{S} = \rho L g$$

Condition de résistance :

$$\sigma_{max} = \rho L g \leq \frac{R_P}{s}$$

Alors :

$$L \leq \frac{R_P}{s \rho g}$$

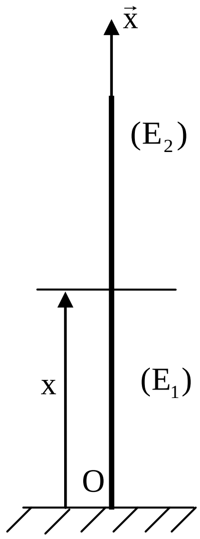
Pour la maçonnerie courante : $L \leq \dfrac{15.10^6}{8.2000.10} = 93,75\,m$

Béton : $L \leq \dfrac{40.10^6}{8.2500.10} = 200\,m$

Acier de construction : $L \leq \dfrac{170.10^6}{8.7800.10} = 272,44\,m$

Exercice 3 : Étude d'une poutre d'égale résistance

Q.1 : A quelle sollicitation est soumise ce pilier ?



Pour : $x \in \{0, L\}$

$$\{\tau_{int}\} = {}_G\{\tau_{ext \to E_2}\} = {}_G\{\tau_{pes \to E_2}\}$$

Avec :

$${}_G\{\tau_{pes \to E_2}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} = -m_{E_2}\, g\, \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Et : $m_{E_2} = \rho\, V_{E_2}$

Alors :

$$\{\tau_{int}\} = {}_G\begin{Bmatrix} -\rho\, V_{E_2}\, g\, \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On a : $N = -\rho\, V_{E_2}\, g \le 0$, donc le pilier est soumis à la compression

Q.2 : On considère une section variable qui varie linéairement sur toute la hauteur du pilier qui vaut S_0 au sol et S_L à l'extrémité libre. On suppose que $S_0 > S_L$: déterminer l'évolution des contraintes en fonction de la hauteur Cette évolution est-elle constante?

Cherchons l'évolution de la section S(x) :

$S(x) = a\, x + b$

Pour x = 0 S = S_0 donc : b = S_0

Pour x = L S = S_L donc $a = \dfrac{S_L - S_0}{L}$

Alors :

$$S(x) = \frac{S_L - S_0}{L} x + S_0$$

La contrainte normale dans la section S(x) :

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} = \frac{-\rho V_{E_2} g}{\dfrac{S_L - S_0}{L} x + S_0}$$

Avec :

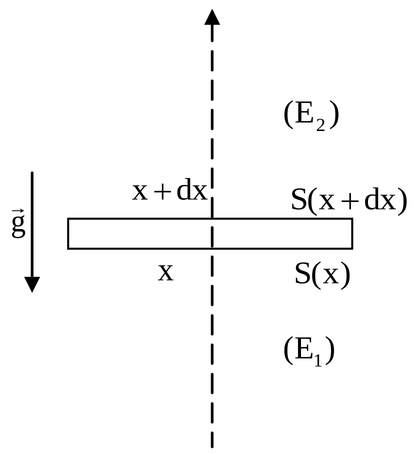
$$\begin{aligned} V_{E_2} &= \iint dV \\ &= \int_x^L S(\xi) d\xi \\ &= \int_x^L \left(\frac{S_L - S_0}{L} \xi + S_0 \right) d\xi \\ &= \frac{S_L - S_0}{2L} \left(L^2 - x^2 \right) + S_0 \left(L - x \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\sigma(x) = -\rho g \frac{\dfrac{S_L - S_0}{2L} \left(L^2 - x^2 \right) + S_0 \left(L - x \right)}{\dfrac{S_L - S_0}{L} x + S_0}$$

On remarque que l'évolution n'est pas constante

Q.3 : Déterminer l'évolution de la section S pour que le critère de contrainte normale constante soit respecté. Pour cela, on étudiera l'équilibre statique d'un petit élément de poutre de longueur dx



Appliquons le théorème de la résultante statique à l'élément dx en projection sur l'axe $\vec{x}$

$$\left(\vec{P}_{dx} + \vec{R}_{E_1 \to S(x)} + \vec{R}_{E_2 \to S(x+dx)}\right) \cdot \vec{x} = 0$$
$$-\rho g S(x) dx - \sigma S(x) + \sigma S(x + dx) = 0$$

On a :

$$S(x + dx) = S(x) + dS$$

Donc :

$$-\rho g S(x) dx + \sigma dS = 0$$

$$\frac{dS}{S(x)} = \frac{\rho g}{\sigma} dx$$

D'où :

$$\ln S = \frac{\rho g}{\sigma} x + C_1 \quad \text{ou} \quad S = C \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma} x\right)$$

Pour x = 0 on a S = S_0

Alors:

$$S = S_0 \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma} x\right)$$

Pour respecter la condition de résistance, on prend :

$$\sigma = \sigma_e$$

Alors:

$$S = S_0 \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_e} x\right)$$

Q.4 : Calculer l'écrasement du pied

$$\Delta l = \int_0^L \frac{\sigma_e}{E} dx$$
$$= \frac{\sigma_e}{E} L$$