<u>Code de Hamming</u>

<u>Présentation :</u> le code de Hamming est utilisé dans les transmissions de données car il permet de détecter et de corriger une erreur survenue dans un bloc transmis.

<u>Principe du codage :</u> on fixe un entier k et on code chaque bloc de $\mathbf{m = 2^k - k - 1}$ bits de données par un bloc de $\mathbf{n = 2^k - 1}$ bits en ajoutant donc **k** bits, dits de correction, a certaines positions au bloc de **m** bits. Le tableau suivant indique les nombres de bits de correction, de données pour différentes valeurs de **k**.

k=3	m=4	n=7
k=4	m=11	n=15
k=5	m=26	n=31

Dans la suite de l'étude, on retient **k=3**.

<u>Position des k bits de correction :</u> les k bits de correction sont places dans le bloc envoyé aux positions d'indice une puissance de 2 en comptant à partir de la gauche. Ainsi, en notant k1 k2 k3 les bits de correction et m1m2 m3 m4 les bits de données, le bloc envoyé est :

A = k1 k2 m1 k3 m2 m3 m4.

<u>Calcul des k bits de correction :</u> les **k** bits de correction sont calcules en utilisant une matrice de parité H, représentée ci-dessous pour **k=3**.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ H = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Remarque :</u> La colonne **i** de la matrice représente en binaire la valeur de **i**.

Les **k** bits de correction sont tels qu'en considérant le vecteur

$$A = \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ m1 \\ k3 \\ m2 \\ m3 \\ m4 \end{pmatrix}, \text{ on ait } H.A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi 3 équations scalaires que doivent vérifier les **k** bits de correction :

$$\begin{cases} k1 + m1 + m2 + m4 = 0_{\text{modulo } 2} \\ k2 + m1 + m3 + m4 = 0_{\text{ modulo } 2} \\ k3 + m2 + m3 + m4 = 0_{\text{ modulo } 2} \end{cases}$$

<u>Remarque :</u> les opérations d'addition sont faites à modulo 2. Par exemple :

1+0=1 ; 1+1=0 ; 1+1+1=1 ; etc.

Le bloc **A** parfaitement déterminé est alors envoyé.

<u>Réception des données et vérification :</u>

On reçoit le bloc **C = c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7** qui peut être diffèrent du bloc **A** si il y a eu des perturbations sur la ligne. Si on considère qu'il n'y a eu qu'une seule erreur de transmission, alors on peut écrire :
C = A + E ou **E** est un bloc contenant 6 bits à **0** et **1** bit à **1**.
Les positions des **0** et du **1** sont inconnues dans le bloc. On calcule le vecteur S tel que :

$$S = \begin{pmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \end{pmatrix} = H.C = H.(A + E) = H.A + H.E = H.E$$

Finalement, **S** est une des colonnes de la matrice de parité dont l'indice nous donne la position de l'erreur dans le bloc **C**. L'erreur est corrigée en changeant le bit considère d'état.
s3 s2 s1 est le code binaire de position de l'erreur dans le bloc **C** que nous obtenons à partir des équations suivantes :

$$\begin{cases} s1 = (c1 + c3 + c5 + c7)_{modulo2} \\ s2 = (c2 + c3 + c6 + c7)_{modulo2} \\ s3 = (c4 + c5 + c6 + c7)_{modulo2} \end{cases}$$

Si s3 = s2 = s1 = 0, alors il n'y a pas eu d'erreur.

QUESTIONS :

-1- Etablir les tables de vérité de **k1**, **k2** et **k3**.

-2- Déterminer les expressions logiques de **k1**, **k2** et **k3**.

-3- On souhaite envoyer le bloc de données **1110**. Déterminer le bloc **A** que l'on envoie effectivement en utilisant le code de Hamming.

-4- Etablir les tables de vérité de **s1**, **s2** et **s3**.

-5- Déterminer les expressions logiques de **s1**, **s2** et **s3**.

-6- On reçoit le bloc **0011101**. Vérifier qu'il ne contient pas d'erreur et corriger le éventuellement.
Ecrire alors le bloc de données envoyé.