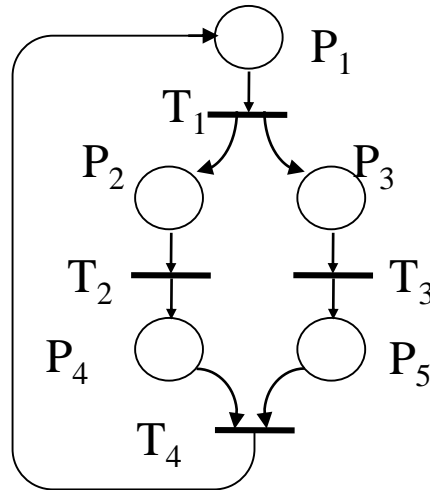


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

O. KAMACH

kamach@ensat.ac.ma



Un RdP ordinaire non marqué est un quadruplet $Q = \langle P, T, \text{Pré}, \text{Post} \rangle$

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini et non vide de places

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini et non vide de transitions

$$P \cap T = \emptyset$$

$\text{Pré} : P \times T \longrightarrow \{0,1\}$ est l'application d'incidence avant

$\text{Post} : T \times P \longrightarrow \{0,1\}$ est l'application d'incidence arrière

Algèbre linéaire : Matrice d'incidence & équation fondamentale

Matrice d'incidence : RdP ordinaire

Matrice d'incidence avant : $W^- = [w^-_{ij}]$

où $w^-_{ij} = \text{Pré}(P_i, T_j)$

$$W^- = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array}$$

Matrice d'incidence : $W = W^+ - W^-$

Matrice d'incidence arrière : $W^+ = [w^+_{ij}]$

où $w^+_{ij} = \text{Post}(T_i, P_j)$

$$W^+ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array}$$

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array}$$

Algèbre linéaire : Matrice d'incidence & équation fondamentale

Matrice d'incidence : RdP généralisé

Matrice d'incidence avant : $W^- = [w_{ij}^-]$

Dimension W^- : Nombre de lignes = Nombre de places

Nombre de colonnes = Nombre de transitions

$$[w_{ij}^-] = \begin{cases} +\alpha & \text{si } P_i \in {}^o t_j \text{ et } \alpha = \text{Pré}(p_i, t_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrice d'incidence arrière $W^+ = [w_{ij}^+]$

:Dimension W^+ : Nombre de lignes = Nombre de places

Nombre de colonnes = Nombre de transitions

$$[w_{ij}^+] = \begin{cases} +\alpha & \text{si } P_i \in t_j^o \text{ et } \alpha = \text{Post}(T_i, P_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

α est un entier strictement positif appelé poids de l'arc

Algèbre linéaire : Matrice d'incidence & équation fondamentale

Matrice d'incidence : RdP généralisé

Matrice d'incidence : $W = W^+ - W^-$

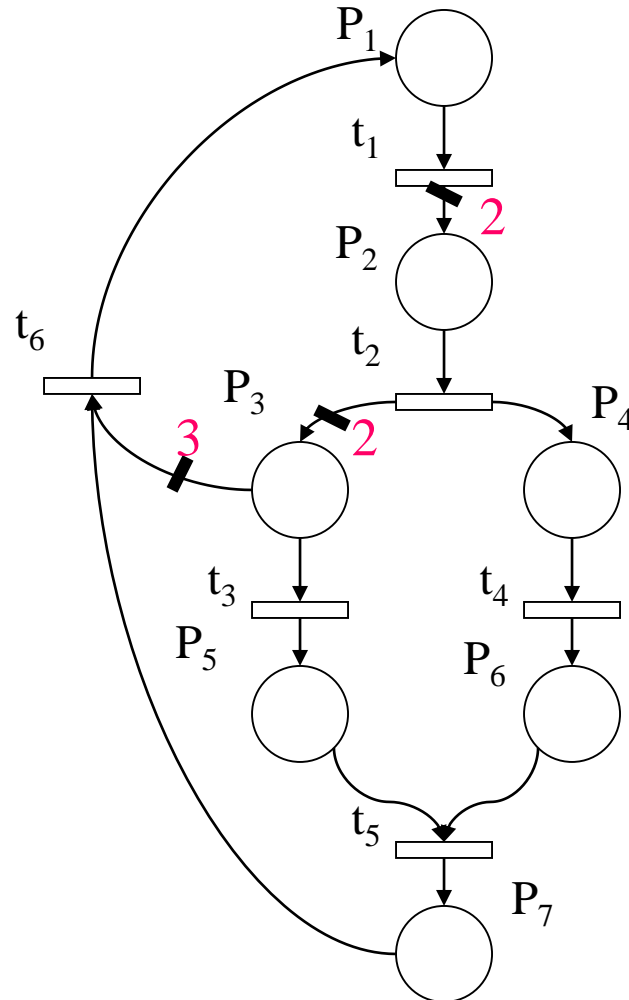
$$[w_{ij}] = \begin{cases} -\alpha & \text{si } P_i \in {}^o t_j \text{ \& } \alpha = \text{Pré}(p_i, t_j) \\ +\alpha & \text{si } P_i \in t_j^o \text{ \& } \alpha = \text{Post}(p_i, t_j) \\ 0 & \text{si } P_i \notin {}^o t_j \text{ et } P_i \notin t_j^o \end{cases}$$

Remarque fondamentale : La matrice W seule ne représente que la structure du réseau, donc le réseau non marqué. Les propriétés qui seront obtenues avec cette matrice uniquement, seront donc des propriétés structurelles (ou génériques) car indépendantes du marquage initial M_0 .

Algèbre linéaire : Matrice d'incidence & équation fondamentale

Matrice d'incidence : RdP généralisé

Exemple



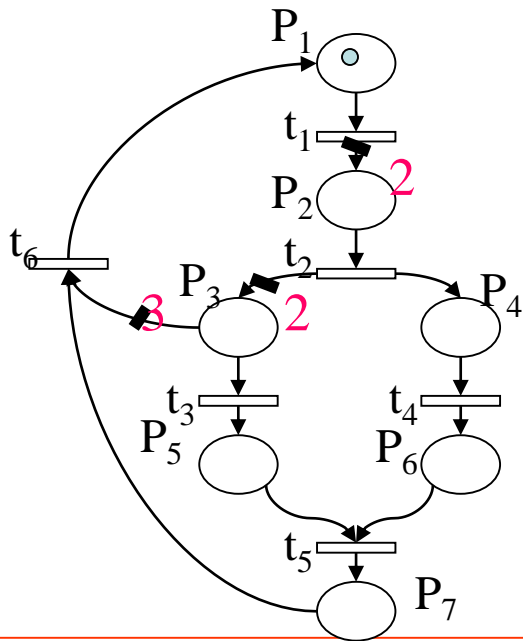
Algèbre linéaire : Matrice d'incidence & équation fondamentale

Equation fondamentale

Si on possède W et un marquage M_i , il est possible de déterminer tous les marquages successifs atteignables par une séquence s .

En effet, soit M_i qui valide t_k ; alors $M_i(t_k > M_j$ avec M_j donné par :

$$M_j = M_i + k \quad (k = \text{kième colonne de } W)$$



$$M1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} & \begin{matrix} t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \\ P6 \\ P7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algèbre linéaire : Matrice d'incidence & équation fondamentale

Equation fondamentale

D'une manière générale :

$$M_1 = M_0 + W(p, t_i) \quad \text{si } M_0(t_i) > M_1$$

$$M_2 = M_1 + W(p, t_j) \quad \text{si } M_1(t_j) > M_2$$

Equation d'état

si l'on considère une séquence de tir \mathbf{s} (par définition admissible), on peut obtenir directement le marquage final M_f d'un réseau de Petri obtenu par application de cette séquence à partir du marquage initial M_0 par la relation :

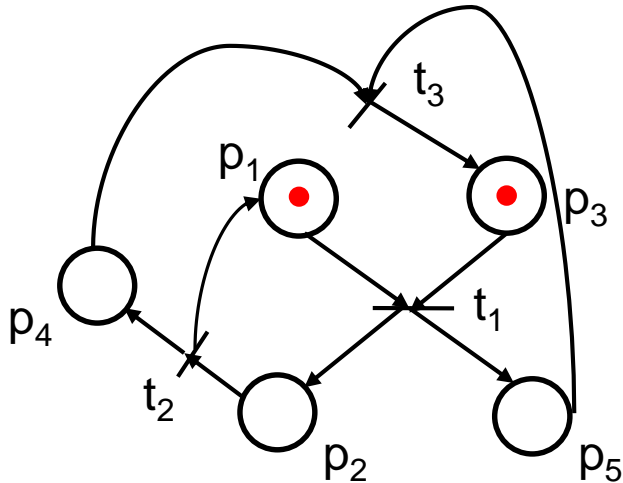
$$M_f = M_0 + W \cdot \underline{S}$$

$\underline{S} = (s_1, s_2, \dots,)$ avec s_i entier positif ou nul compte le nombre de t_i dans \mathbf{S} .

\underline{S} est le vecteur caractéristique de la séquence \mathbf{S}

Algèbre linéaire : Matrice d'incidence & équation fondamentale

Equation fondamentale



La transition t_1 est sensibilisée et son tir (ou franchissement) conduit à :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

M_0 M_1

Trouver le marquage accessible depuis M_0 , si on considère une séquence finie de tir $S = t_1 t_2 t_3 t_1$

Réseaux de Petri Temporisés

Un RdP Temporisé permet de décrire un système dont le comportement dépend du temps. Les modèles RdP T sont nécessaires pour l'évaluation de performance (productivité, sûreté de fonctionnement,...).

La temporisation peut être modélisée de deux façons :

- temporisation associée aux places (RdP P-temporisé, temps minimal de séjour d'une marque dans une place),
- temporisation associée aux transitions (RdP T-temporisé).

Un **RdP P-temporisé** est un doublet $\langle R, \tau \rangle$ tel que :

- R est un RdP marqué
- τ est une application de l'ensemble des places P dans Q.

On appellera $\tau(P_i) = d_i$, la temporisation associée à la place P_i .

Un **RdP T-temporisé** est un doublet $\langle R, \tau \rangle$ tel que :

- R est un RdP marqué
- τ est une application de l'ensemble des transitions T dans Q.

On appellera $\tau(T_j) = d_j$, la temporisation associée à la transition T_j .

Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : principe de fonctionnement

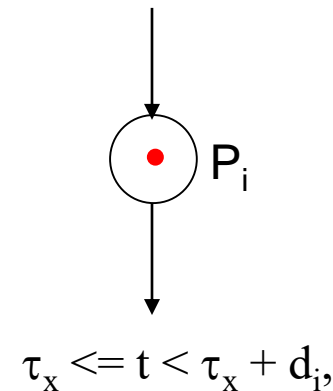
Définit les instants (discrets) auxquels les transitions sont sensibilisées.

Fonctionnement :

Quand une marque arrive en P_i , elle doit rester pendant une durée d_i où elle demeure INDISPONIBLE ; la marque devient DISPONIBLE après cette durée.

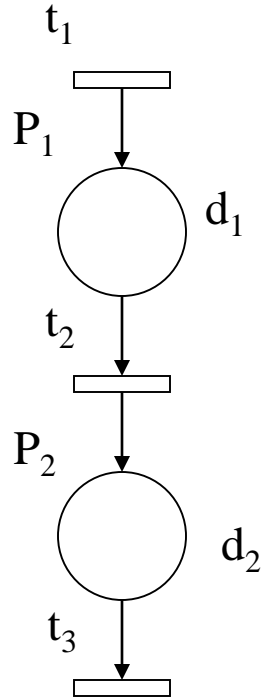
Il existe ainsi 2 états pour une marque dans P_i :

- indisponible durant τ_x et $\tau_x + d_i$,
- disponible après $\tau_x + d_i$

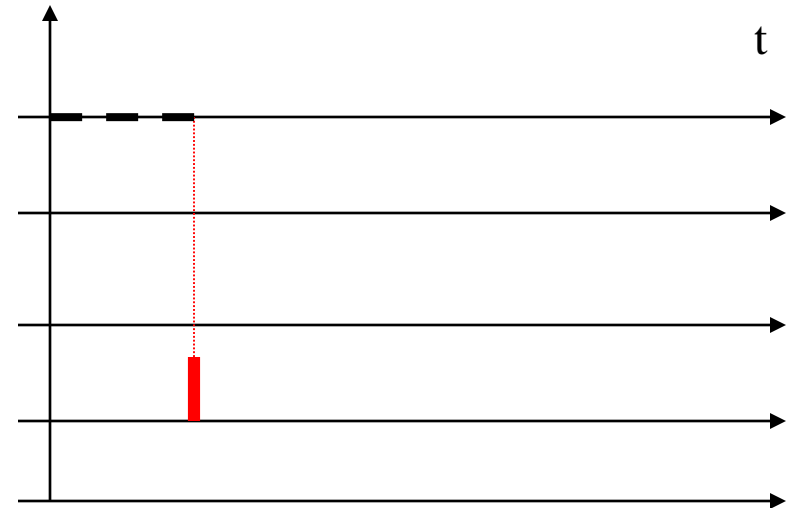


Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : principe de fonctionnement

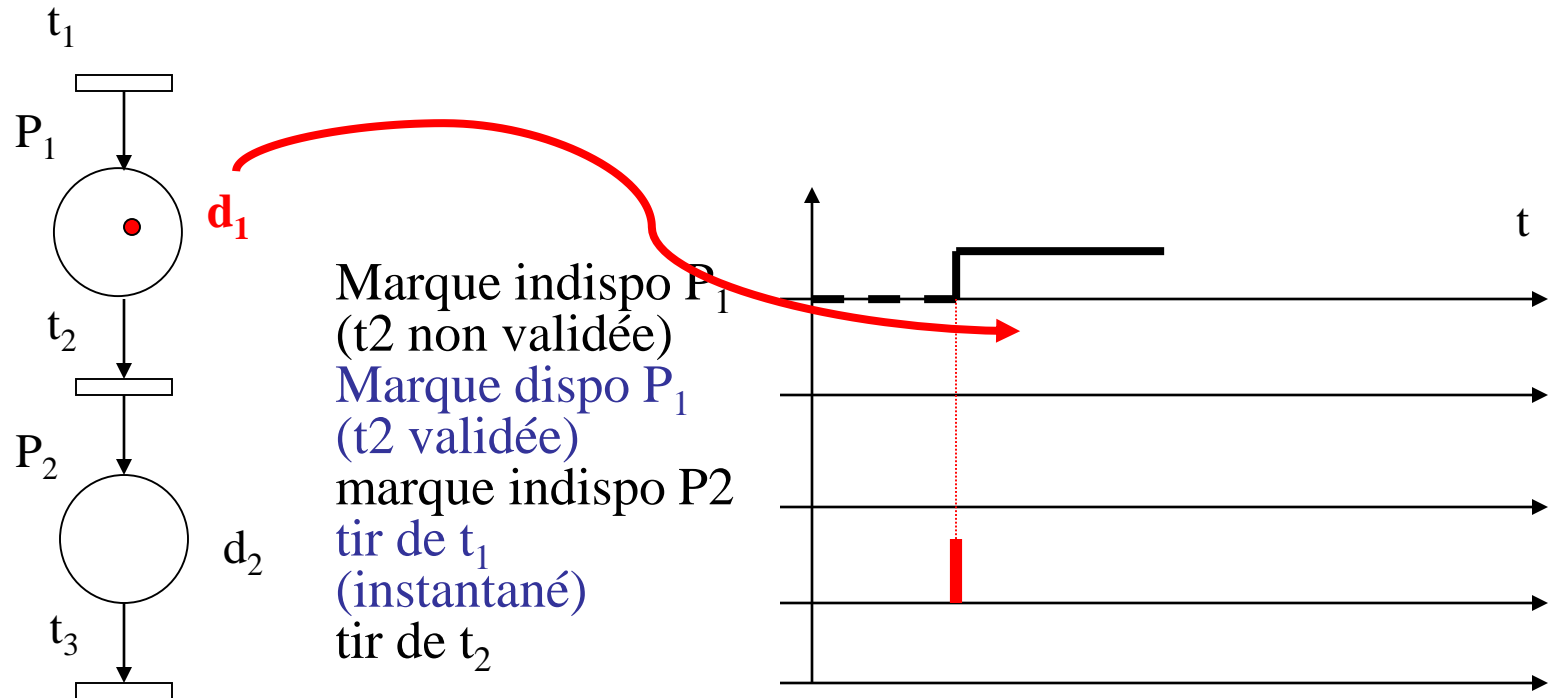


Marque indispo P_1
(t_2 non validée)
Marque dispo P_1
(t_2 validée)
marque indispo P_2
tir de t_1
(instantané)
tir de t_2



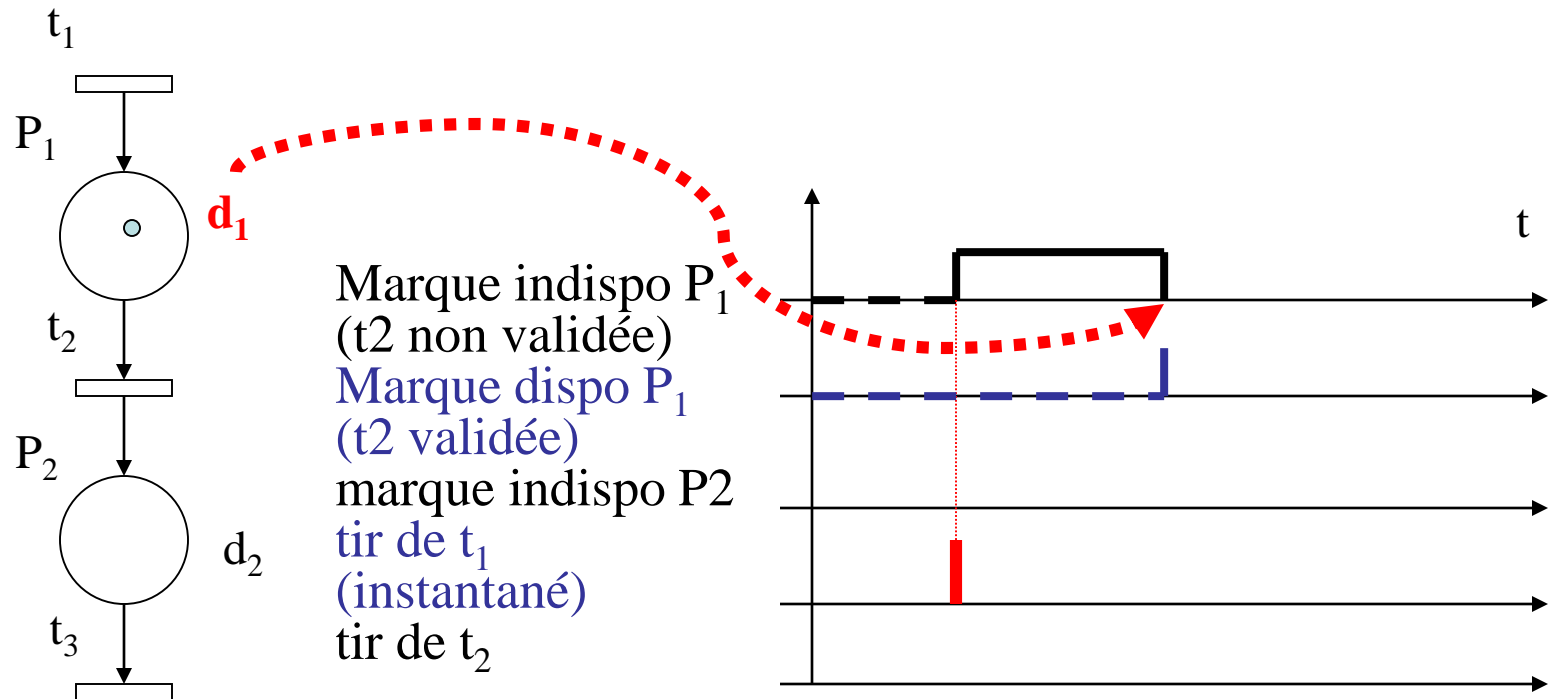
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : principe de fonctionnement



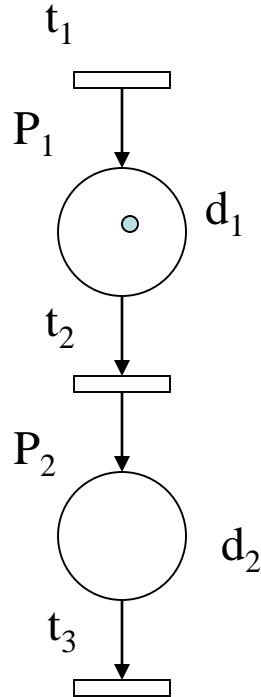
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : principe de fonctionnement

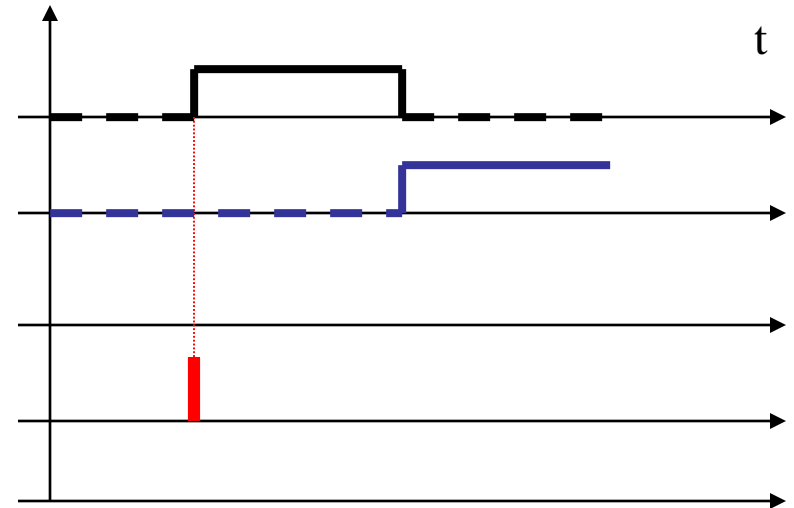


Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : principe de fonctionnement

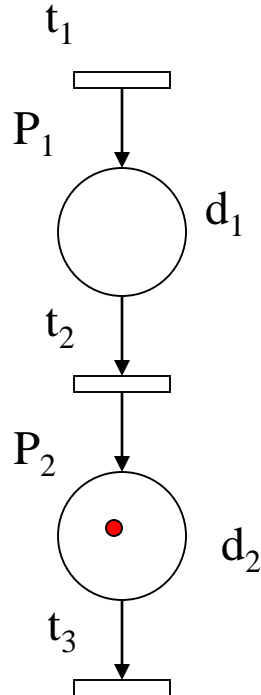


Marque indispo P_1
(t_2 non validée)
Marque dispo P_1
(t_2 validée)
marque indispo P_2
tir de t_1
(instantané)
tir de t_2

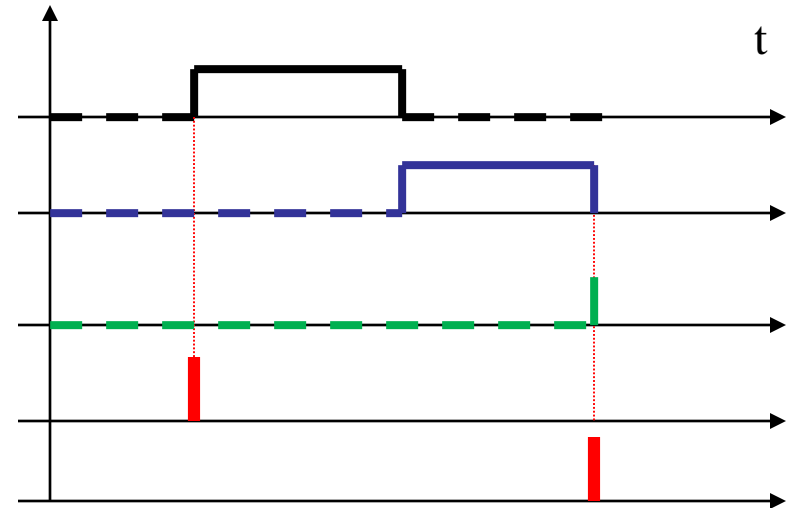


Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : principe de fonctionnement

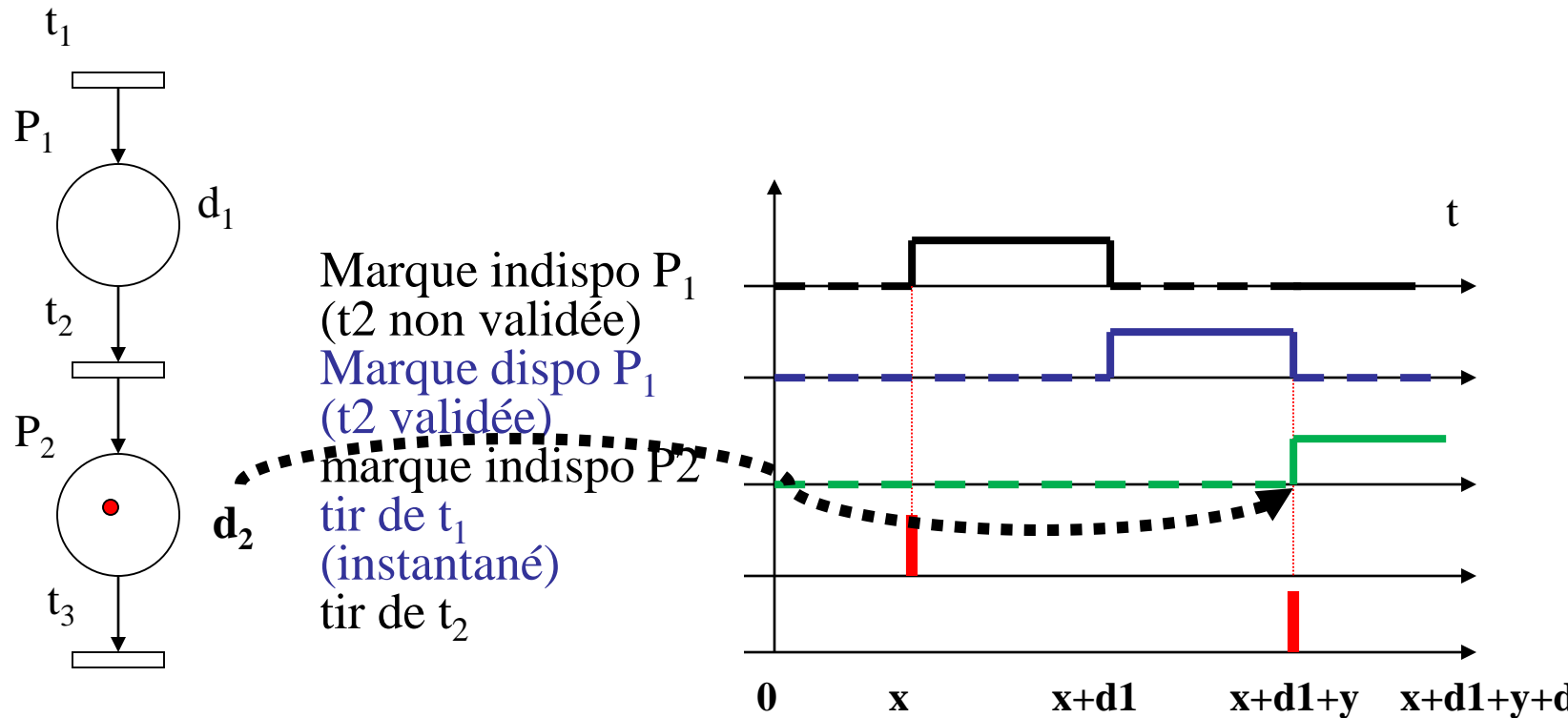


Marque indispo P_1
(t_2 non validée)
Marque dispo P_1
(t_2 validée)
marque indispo P_2
tir de t_1
(instantané)
tir de t_2



Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : principe de fonctionnement



Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : fonctionnement à vitesse maximale

Remarque :

- l'évolution d'un RdP P-temporisé à vitesse maximale consiste à tirer une transition sitôt qu'elle est sensibilisée.

On note :

- t_j/d_k la transition t_j qui fait passer d'un marquage M_1 à M_2 , d_k la durée entre le moment où M_1 a été atteint et celui où la transition s'est faite,
- Dans certains cas, le passage de M_1 à M_2 peut s'effectuer par le franchissement de plusieurs transitions qui sont validées au même instant. Ceci sera noté $(t_i, t_j, \dots)/d_k$.

Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : fonctionnement à vitesse maximale

Remarque :

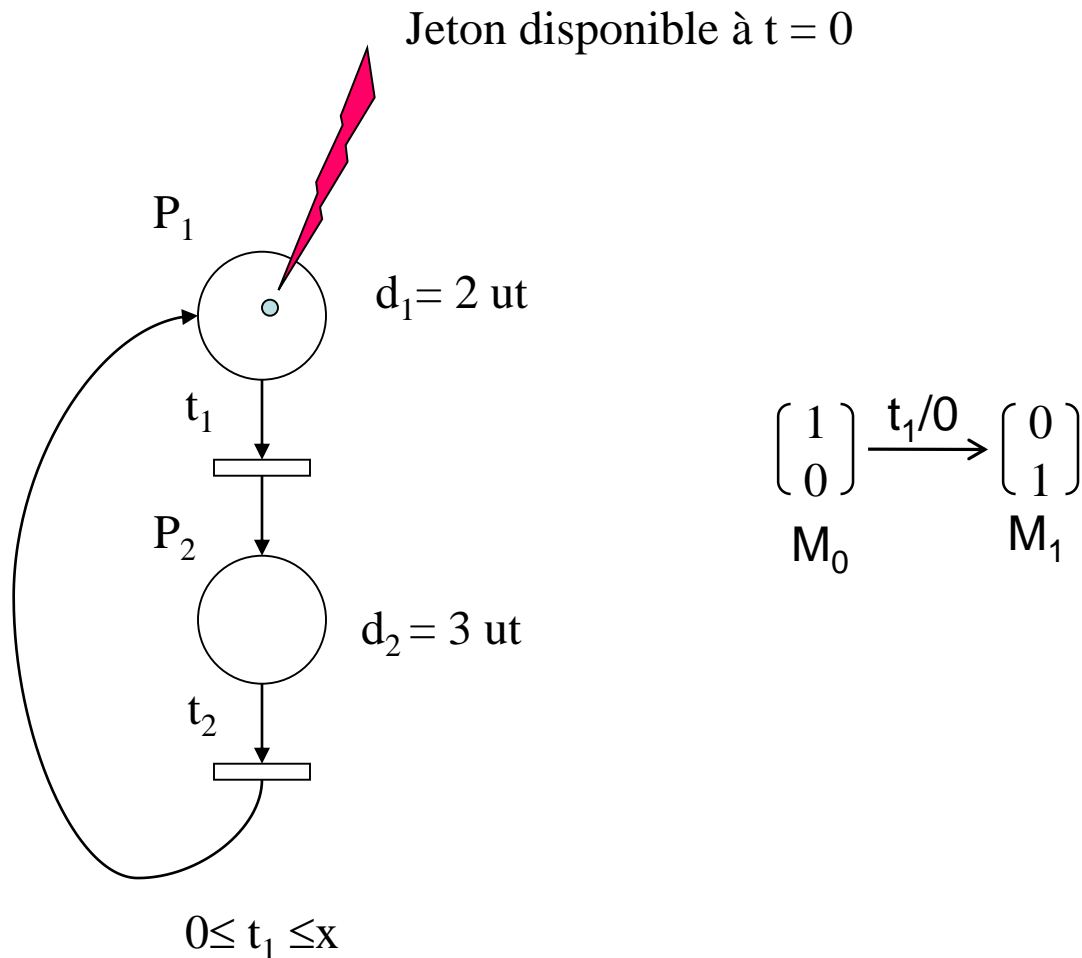
- l'évolution d'un RdP P-temporisé à vitesse maximale consiste à tirer une transition sitôt qu'elle est sensibilisée.

On note :

- t_j/d_k la transition t_i qui fait passer d'un marquage M_1 à M_2 , d_k la durée entre le moment où M_1 a été atteint et celui où la transition s'est faite,
- $(t_i, t_j, \dots)/d_k$ quand il existe une séquence de transitions tirable après d_k .
- entre parenthèse la durée d'indisponibilité résiduelle.

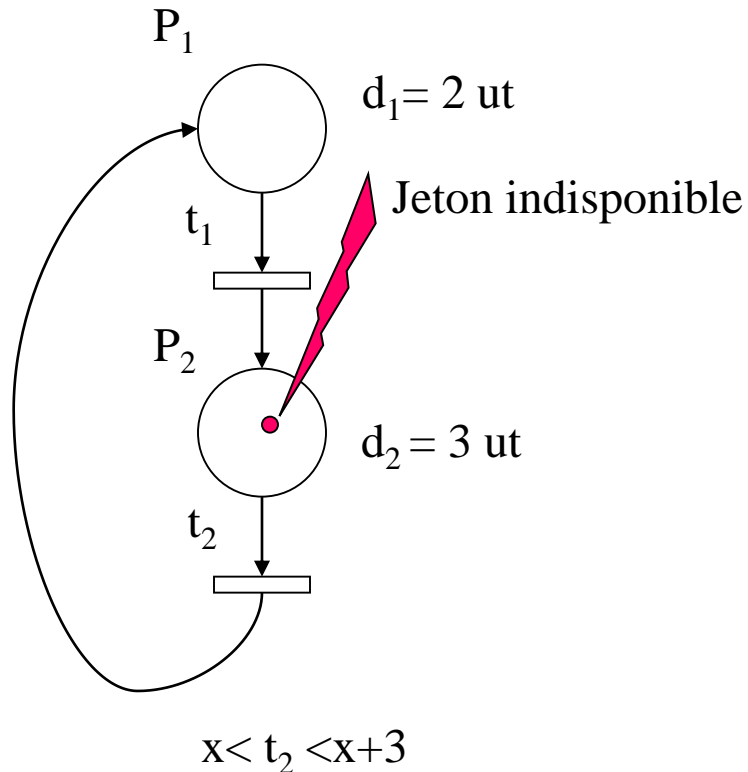
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale

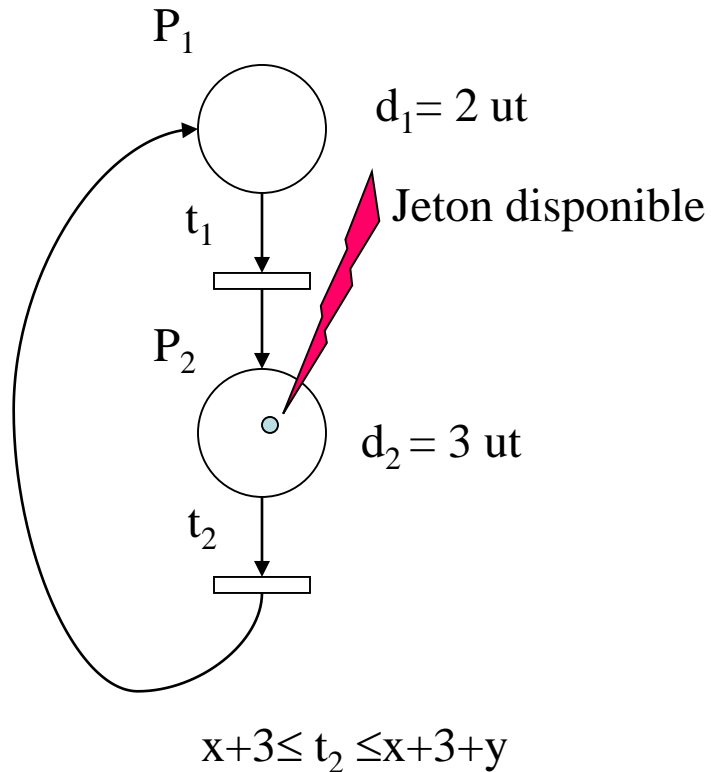


$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1/0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M_0 \qquad M_1$

Réseaux de Petri Temporisés

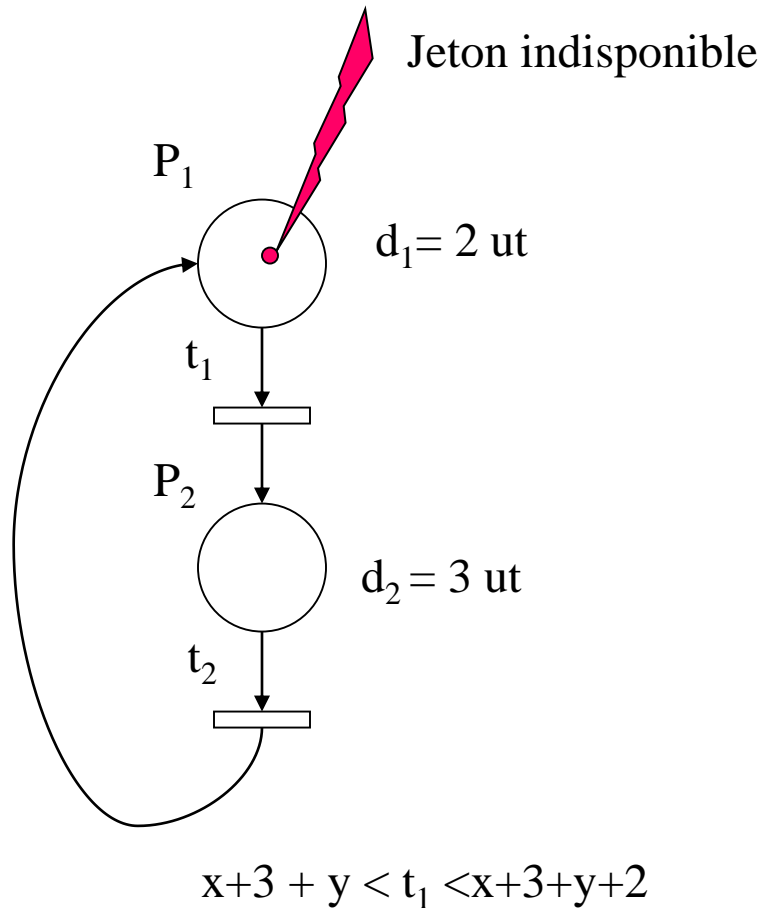
RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ M_0 \end{matrix} \xrightarrow{t_1/0} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ M_1 \end{matrix} \xrightarrow{t_2/3} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ M_2 \end{matrix}$$

Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale

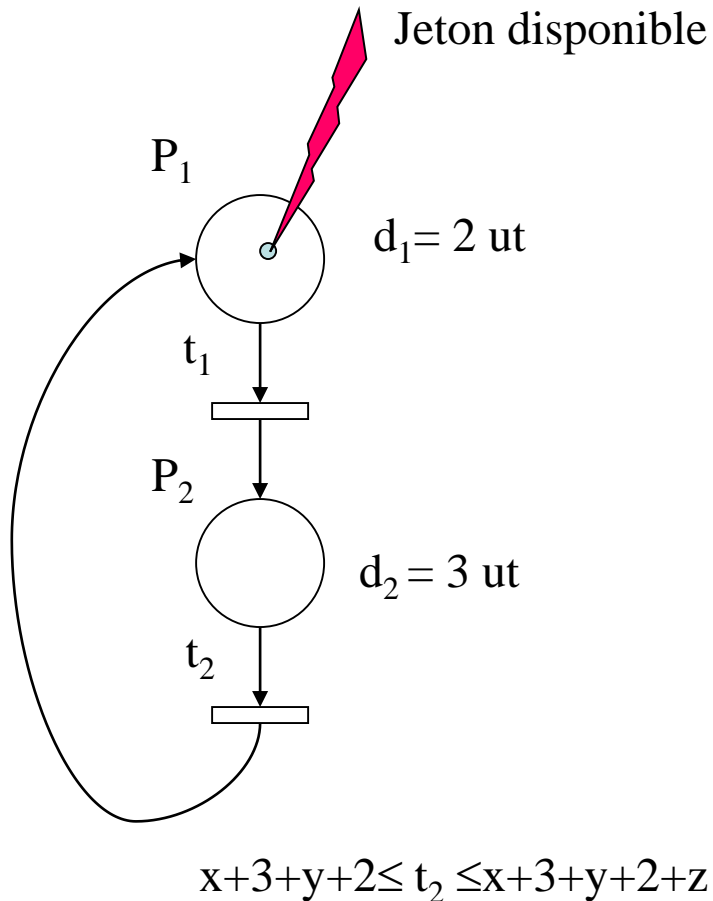


$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t_1/0} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{t_2/3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M_0 \qquad M_1 \qquad M_2$

Réseaux de Petri Temporisés

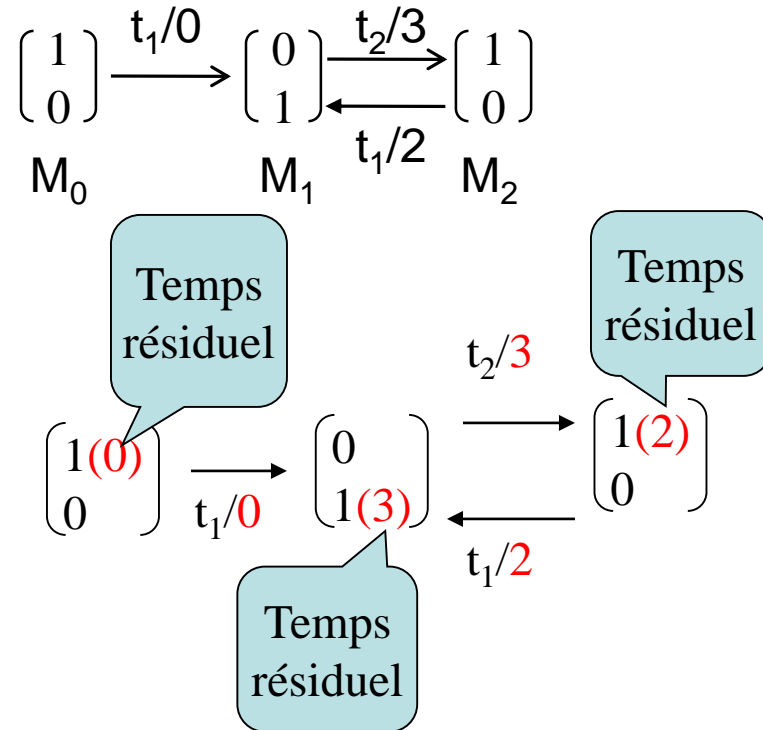
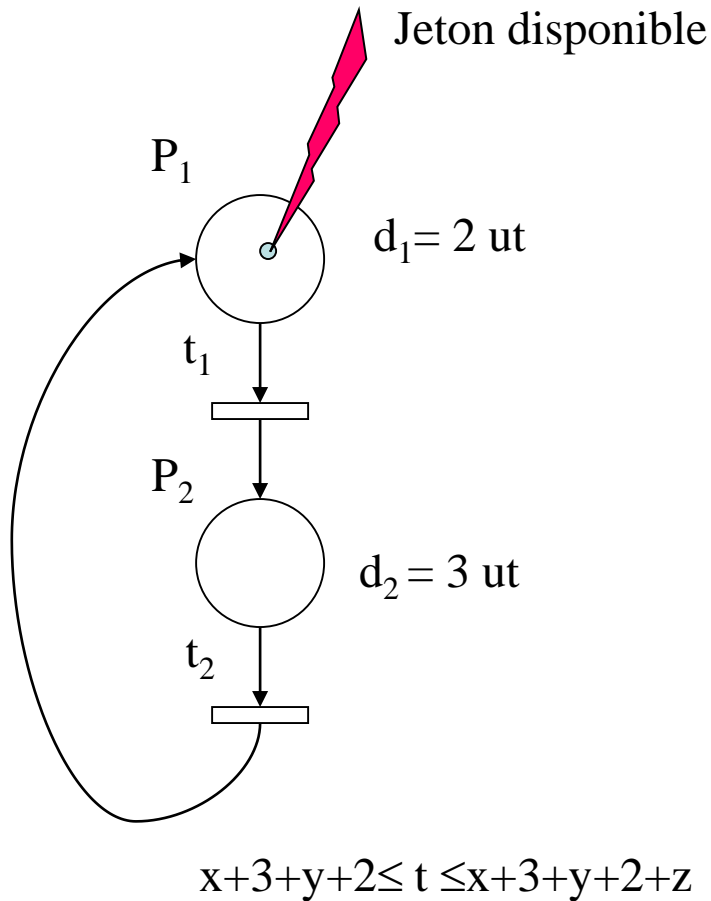
RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ M_0 \end{array} \xrightarrow{t_1/0} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ M_1 \end{array} \xrightarrow{t_2/3} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ M_2 \end{array} \xleftarrow{t_1/2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ M_1 \end{array}$$

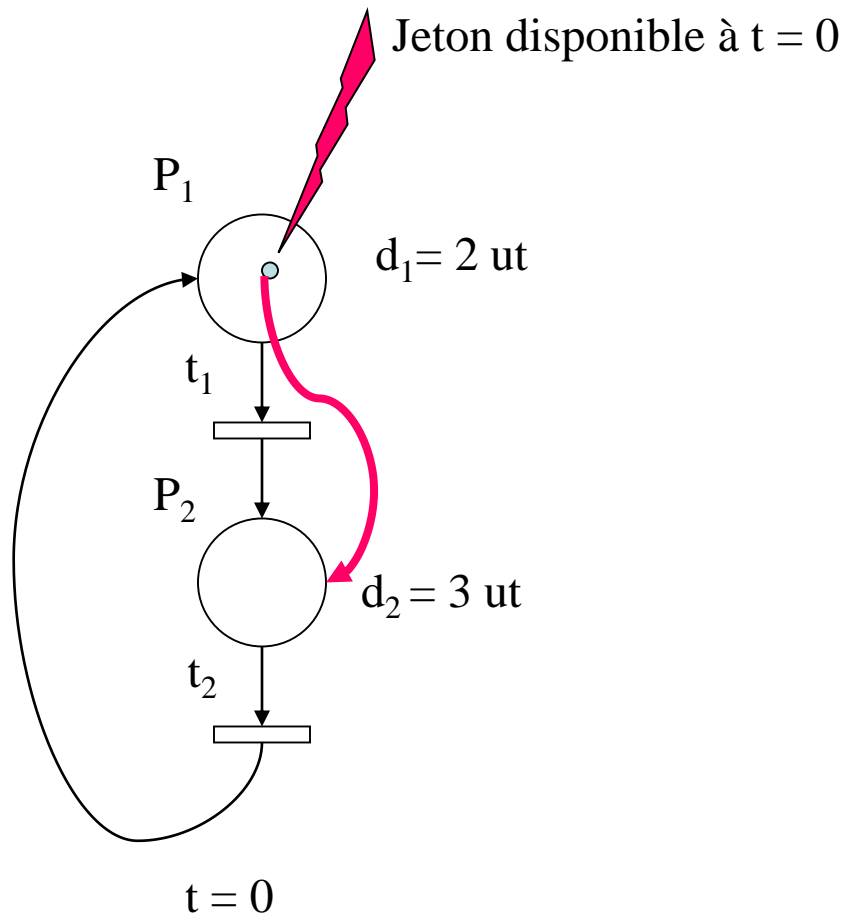
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



Réseaux de Petri Temporisés

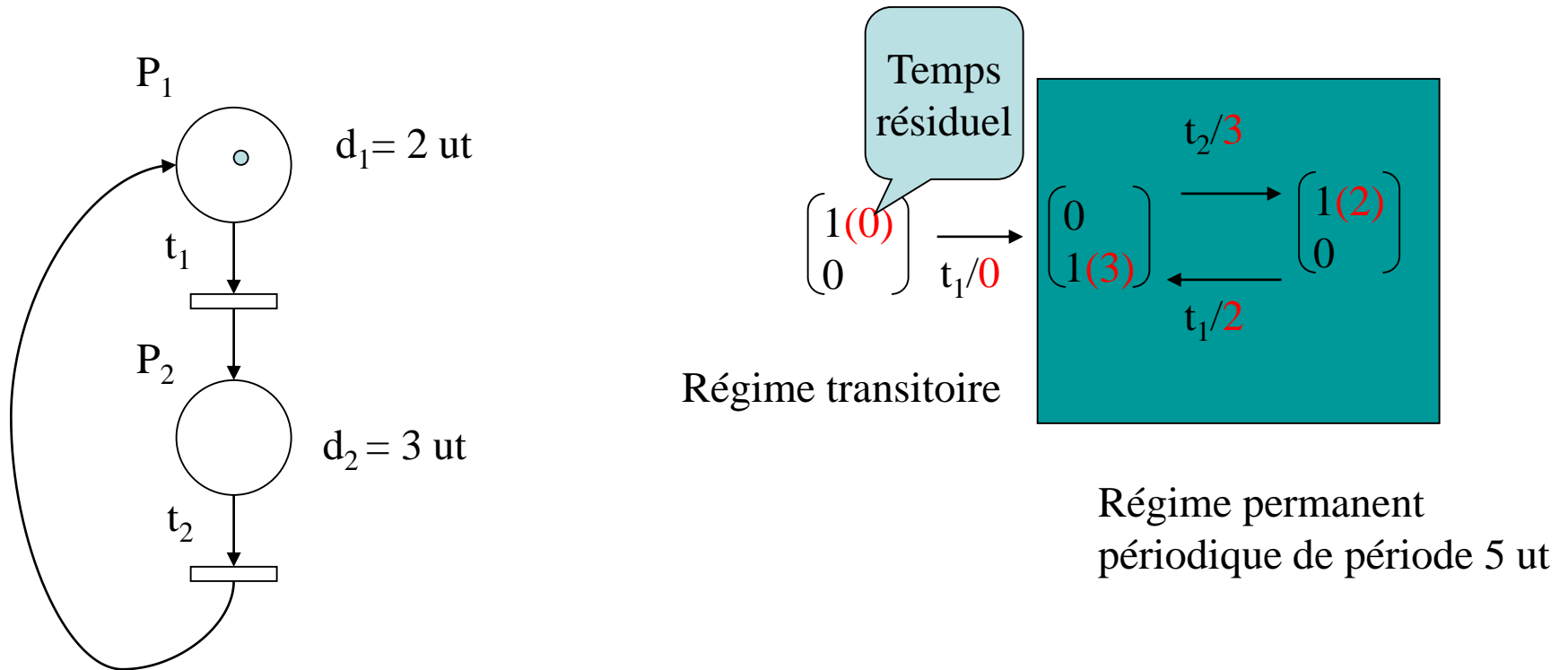
RdP P-temporisés : fréquence de franchissement



$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{pmatrix} 1(0) \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{t_1/0} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1(3) \end{pmatrix} & \xrightarrow{t_2/3} & \begin{pmatrix} 1(2) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & & & \xleftarrow{t_1/2} &
 \end{array}$$

Réseaux de Petri Temporisés

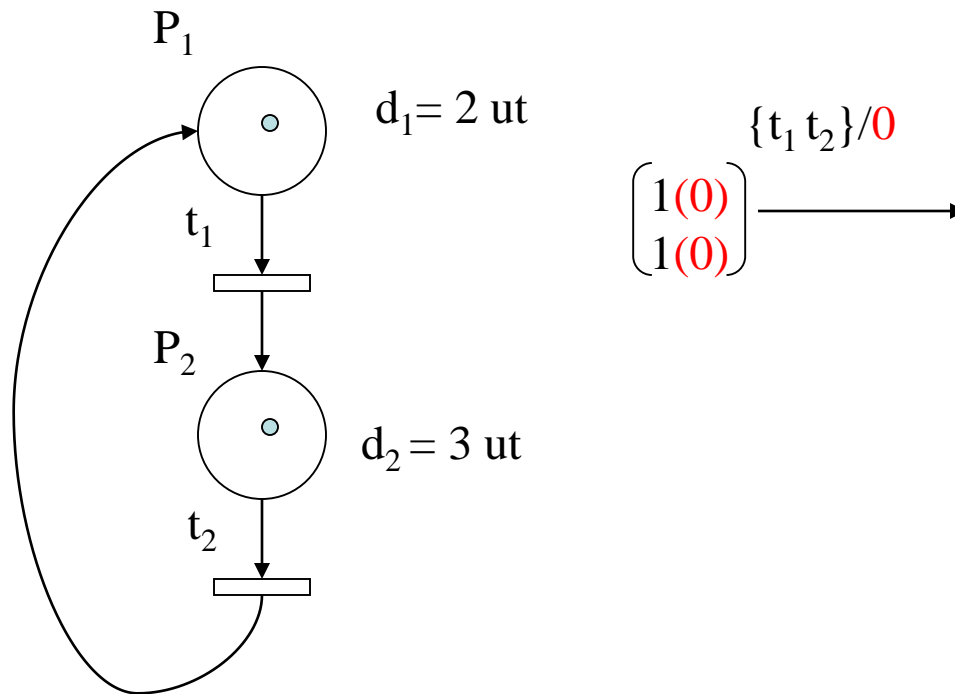
RdP P-temporisés : fréquence de franchissement



Durant cette période t_1 a été franchie 1 fois, ainsi que $t_2 \rightarrow f_1=f_2=1/5$

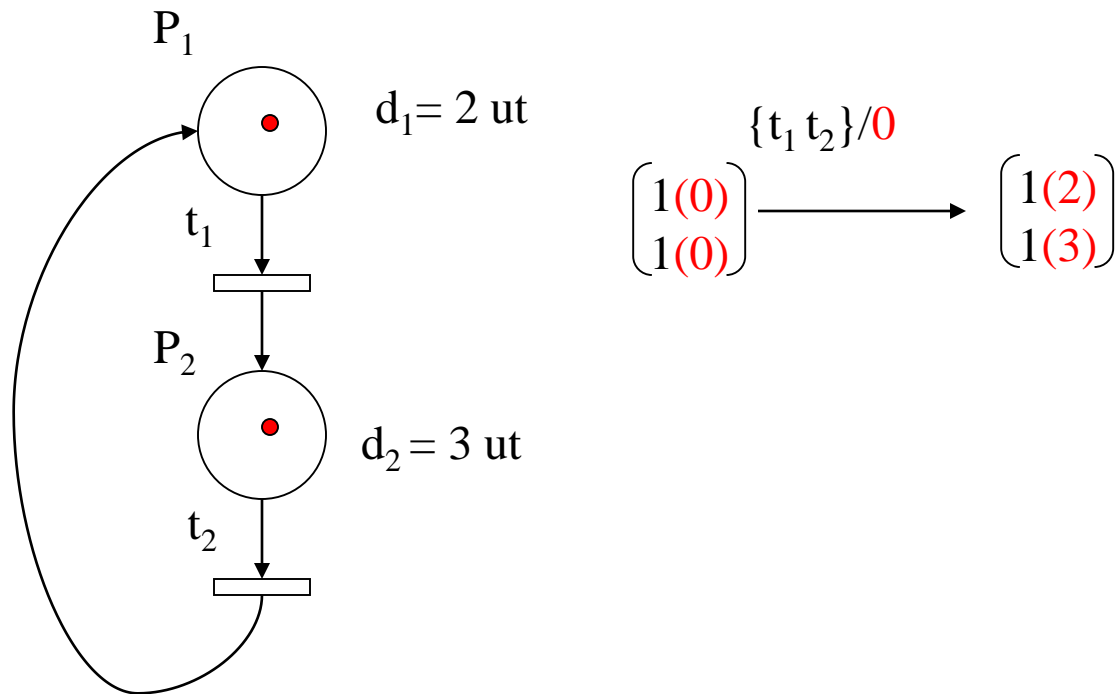
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



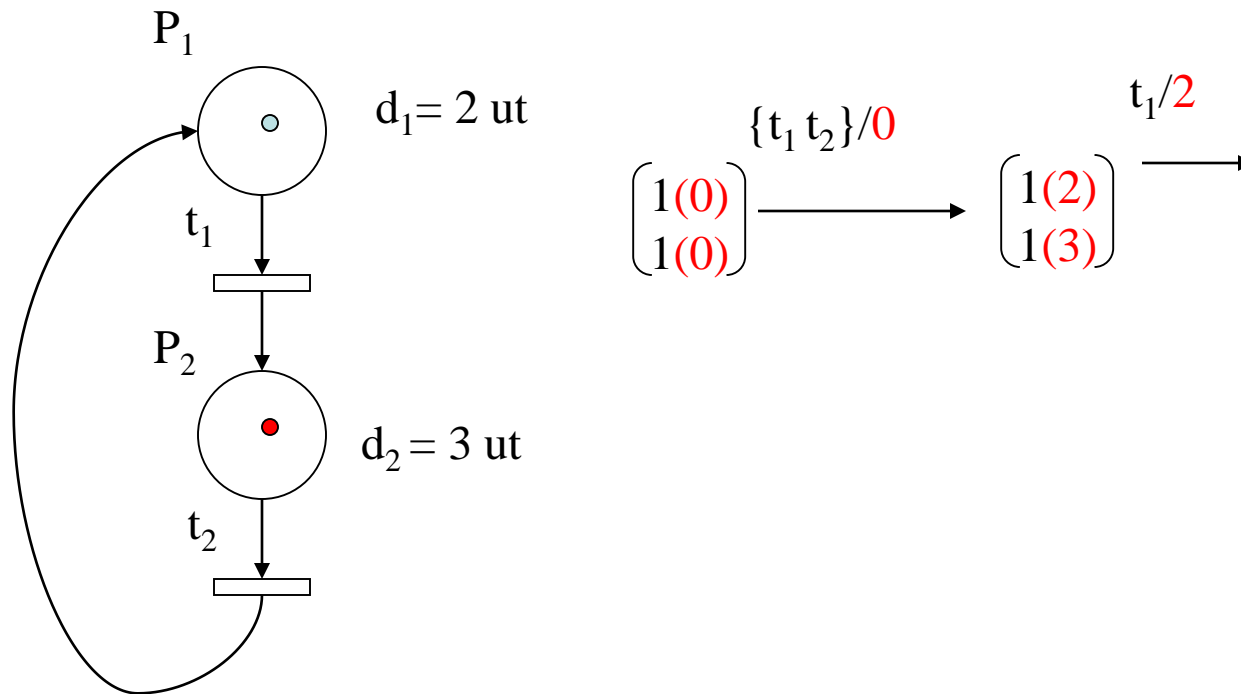
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



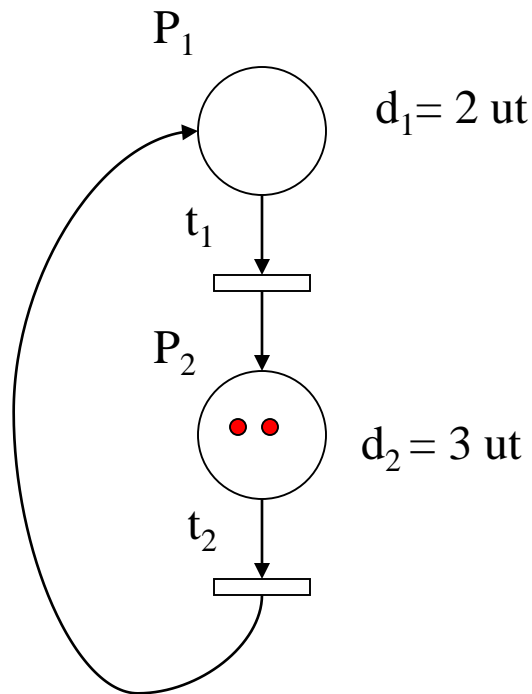
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



Réseaux de Petri Temporisés

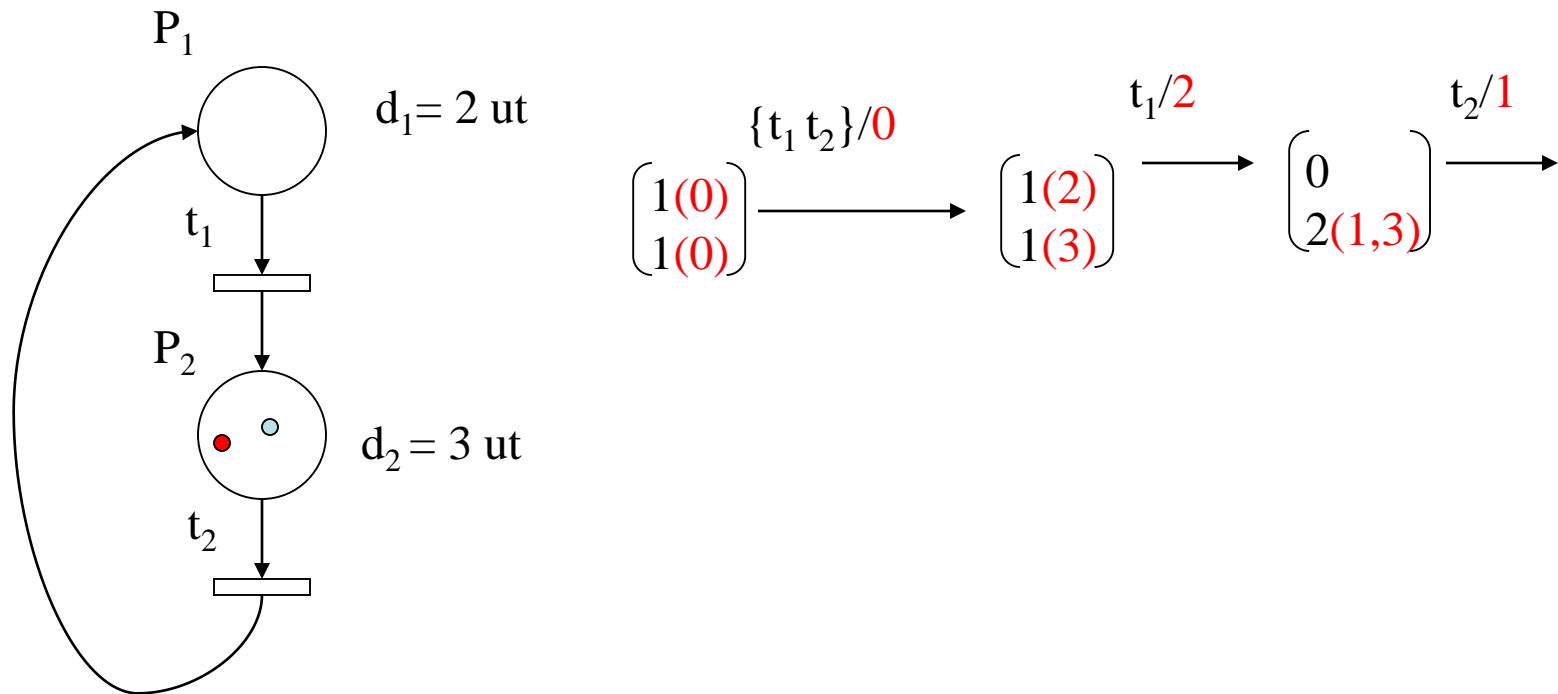
RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



$$\begin{bmatrix} 1(0) \\ 1(0) \end{bmatrix} \xrightarrow{\{t_1 \ t_2\}/0} \begin{bmatrix} 1(2) \\ 1(3) \end{bmatrix} \xrightarrow{t_1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2(1,3) \end{bmatrix}$$

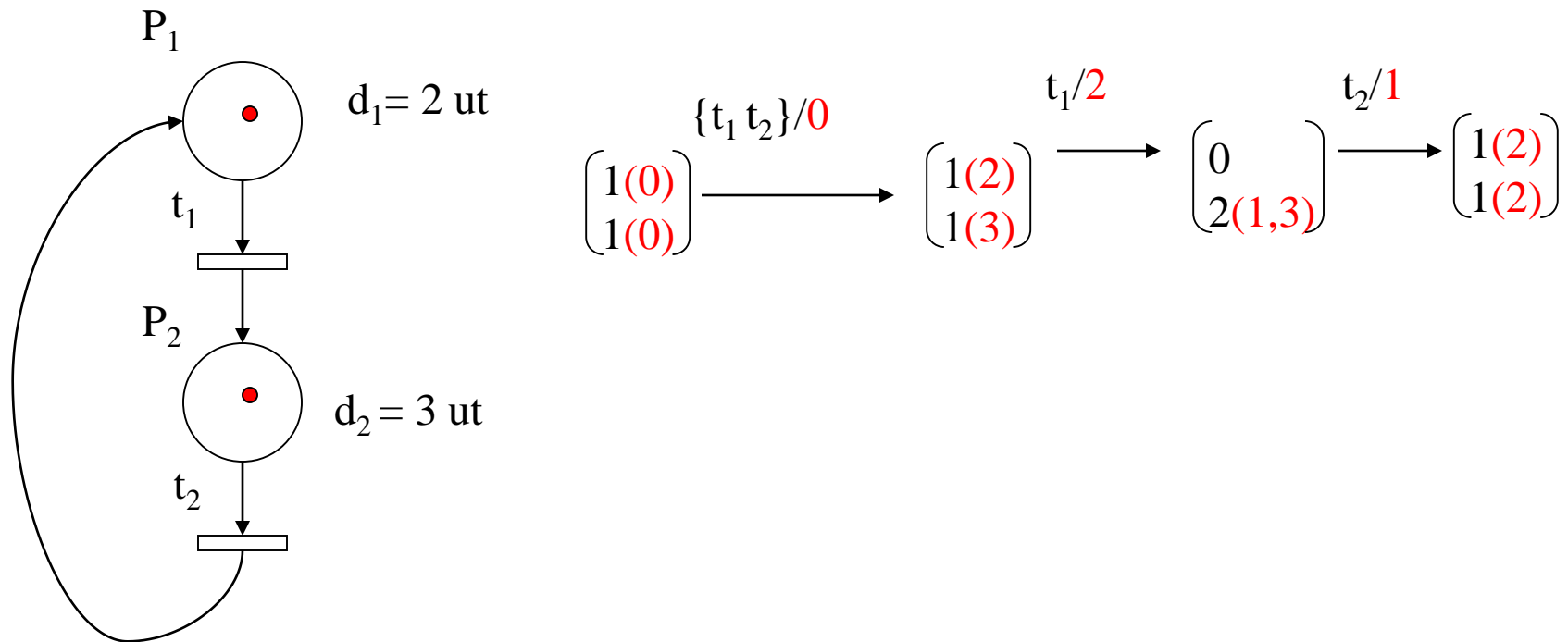
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale



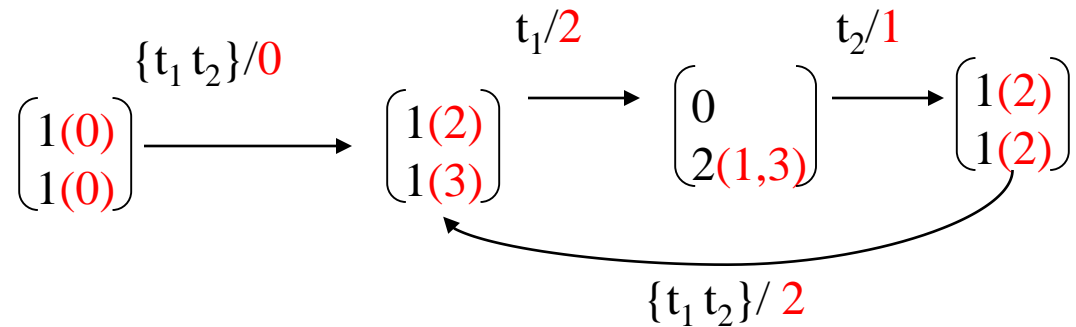
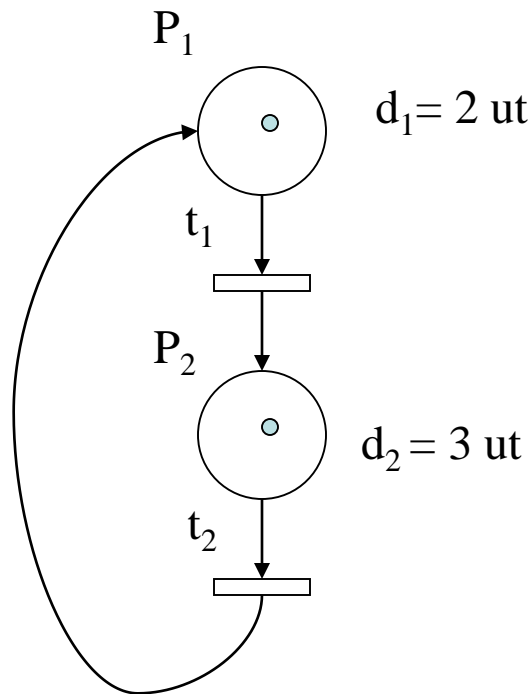
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : fréquence de franchissement



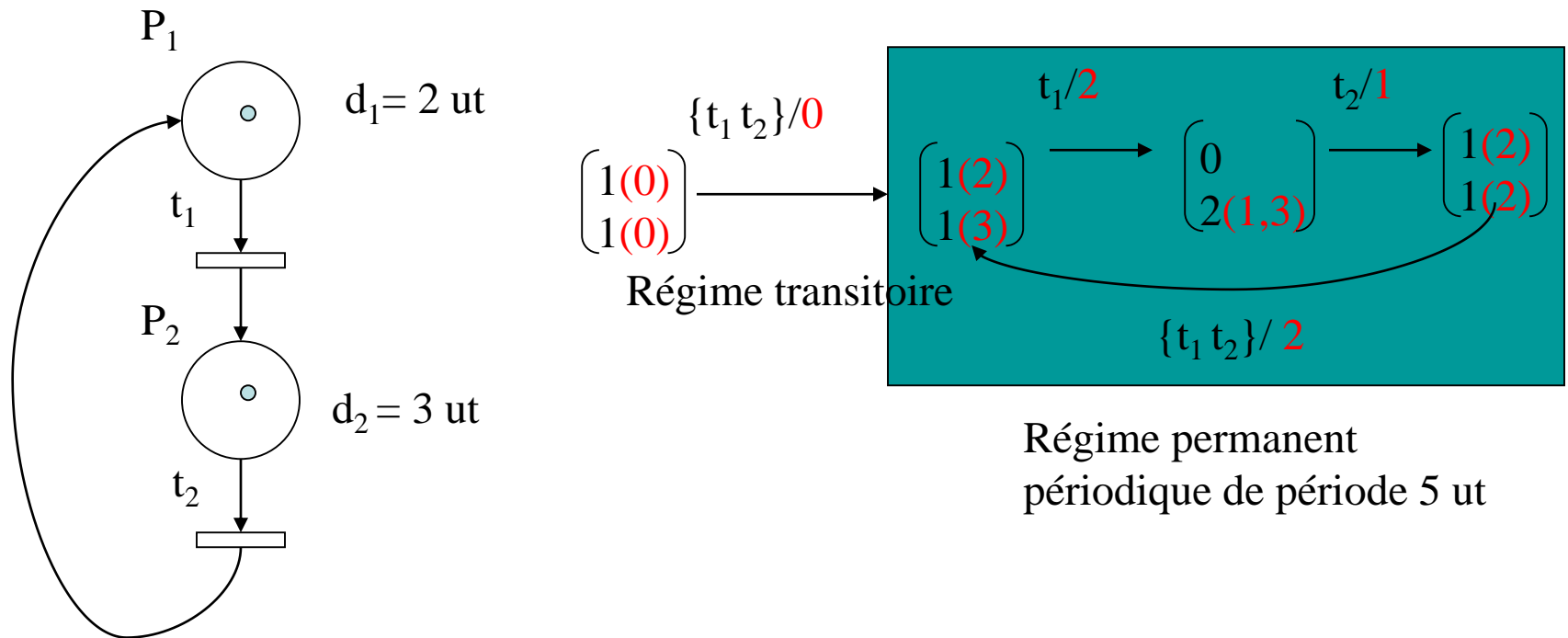
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : fréquence de franchissement



Réseaux de Petri Temporisés

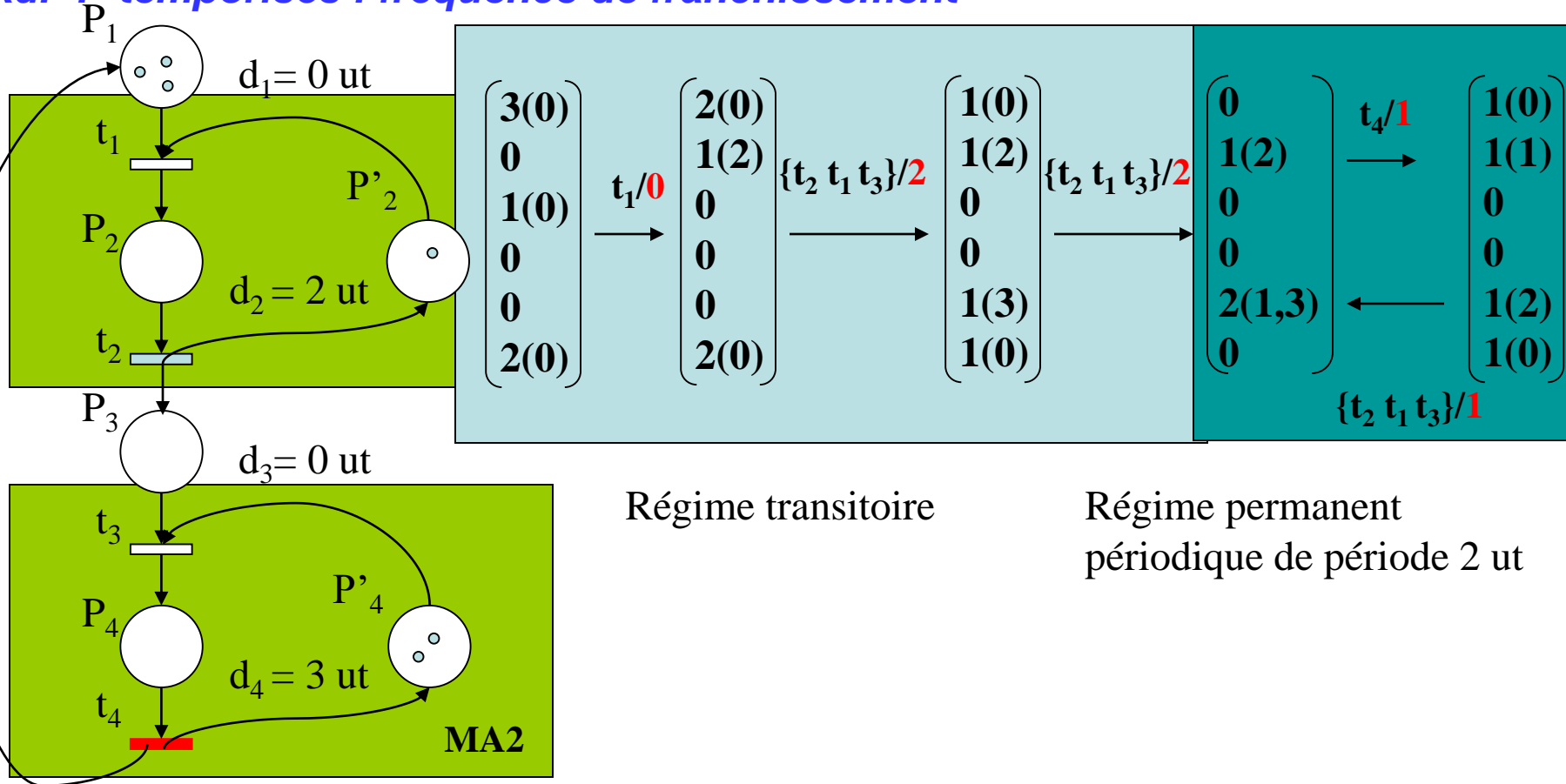
RdP P-temporisés : fréquence de franchissement



Durant cette période t_1 a été franchie 2 fois, ainsi que $t_2 \rightarrow f_1=f_2=2/5$

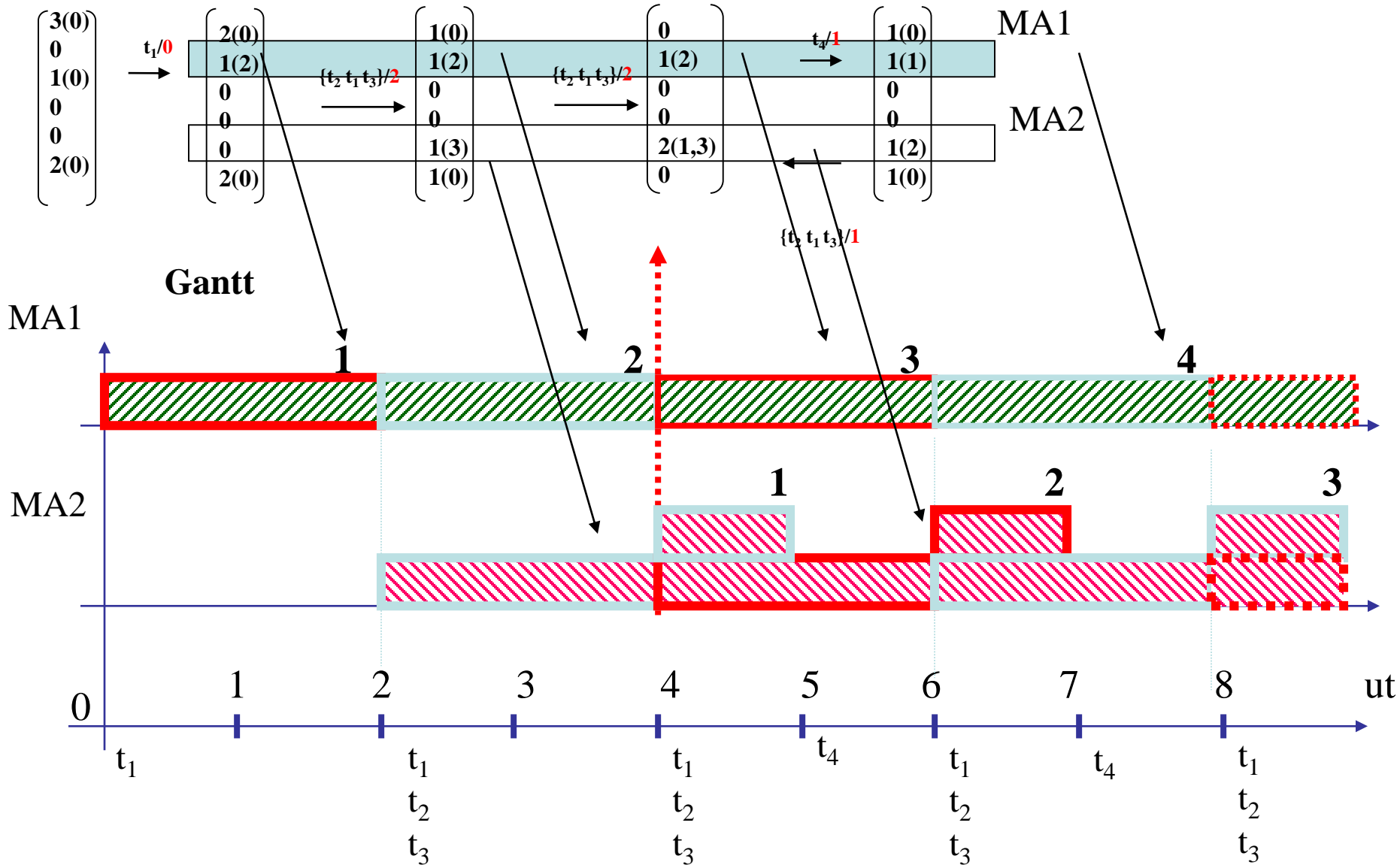
Réseaux de Petri Temporisés

RdP P-temporisés : fréquence de franchissement

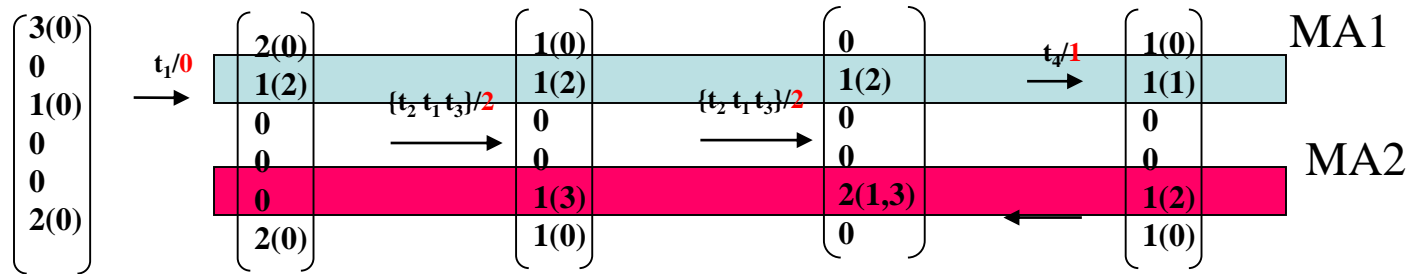


Durant cette période ttes les transitions ont été franchies 1 fois $\rightarrow f_1=f_2=f_3=f_4=1/2$

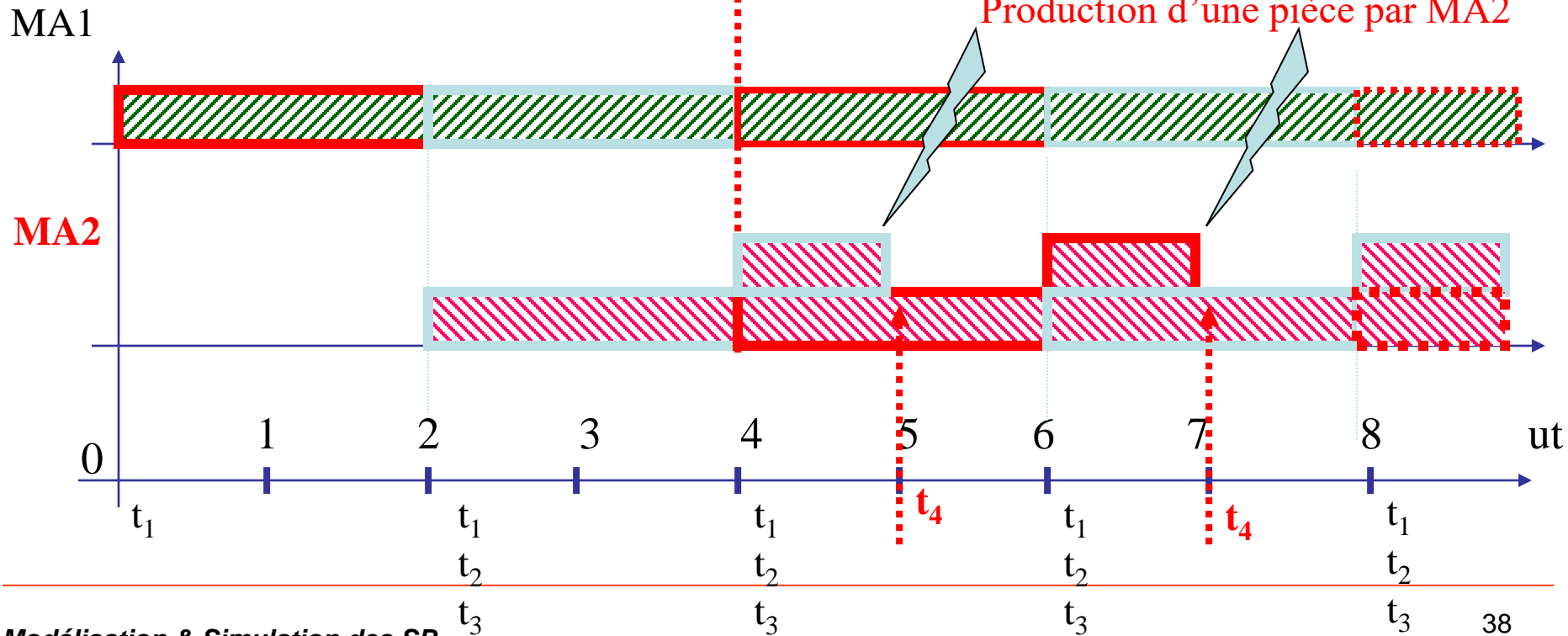
GdM V_{\max}



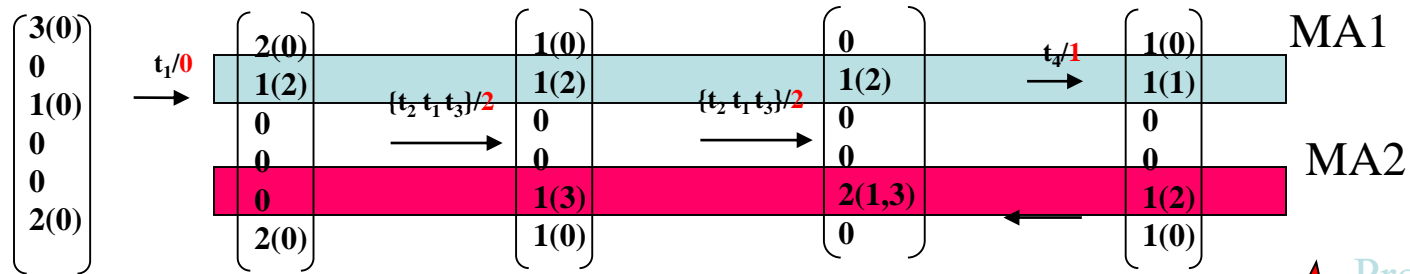
GdM V_{\max}



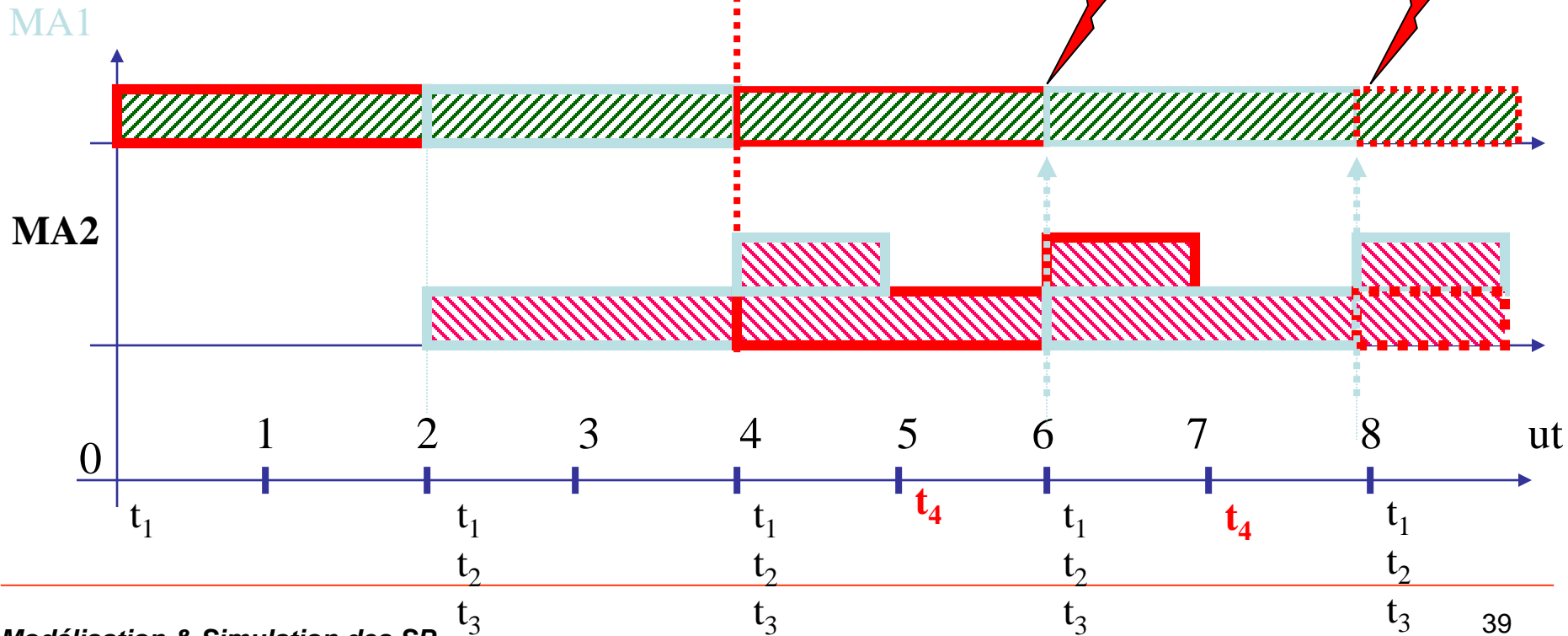
Gantt



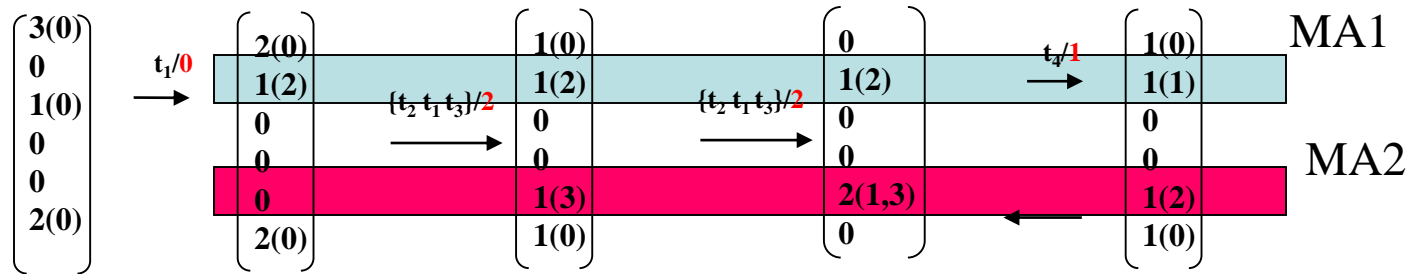
GdM V_{\max}



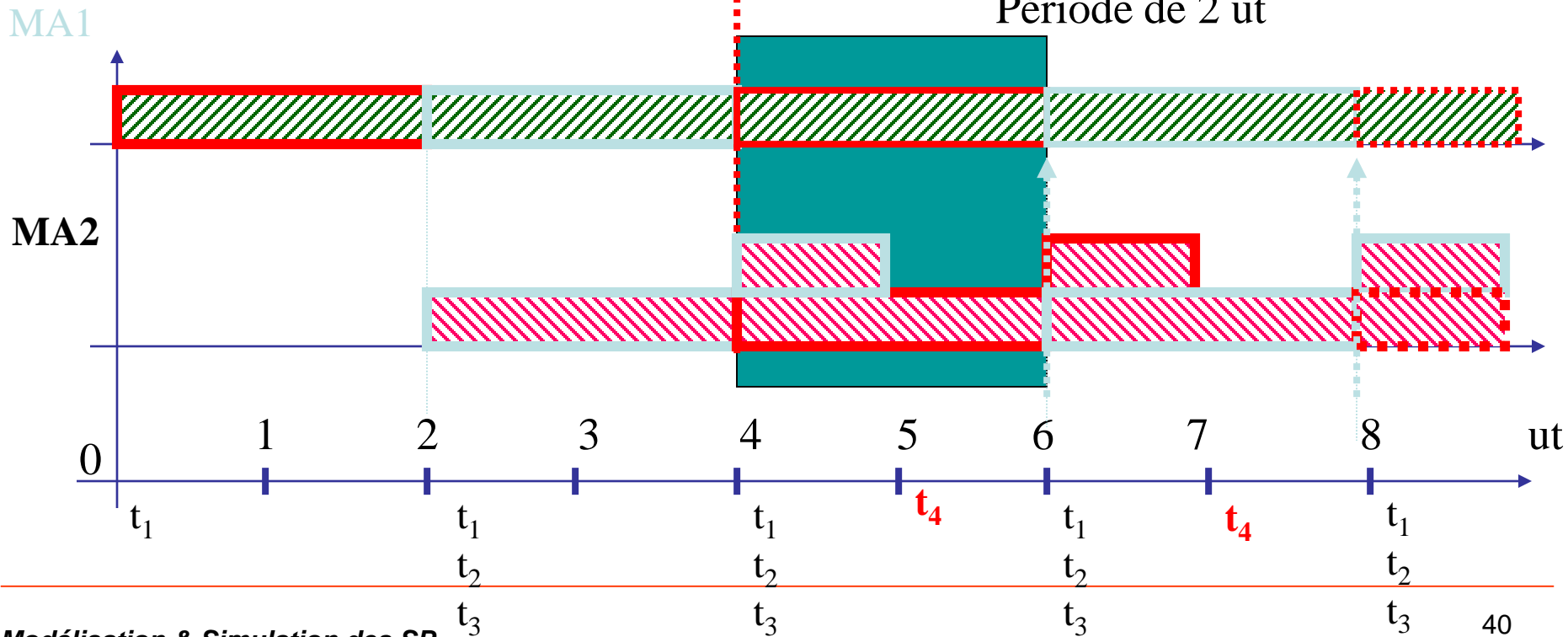
Gantt



GdM V_{\max}



Gantt



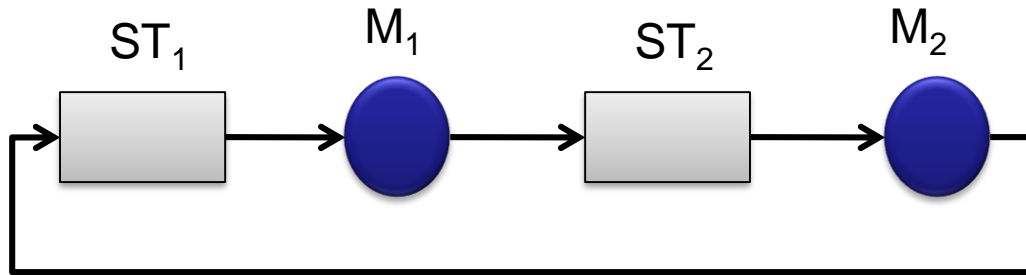
Réseaux de Petri Temporisés

Exemple : RdP P-temporisé :

On considère qu'il y a deux palettes (portant chacune une pièce) qui passent successivement sur les machines M_1 et M_2 (cf. figure ci-dessous).

La machine M_1 ne peut traiter qu'une seule pièce à la fois et son temps de service est $D_1 = 2$.

La machine M_2 peut traiter deux pièces à la fois. Le temps de service pour une pièce est $D_2 = 3$.



3.1 Représenter le fonctionnement de ce système par un RdP P-temporisé.

L'état initial est tel que les deux palettes sont dans le stock ST_1 .

3.2 Représenter le graphe des marquages du fonctionnement à vitesse maximale (en indiquant les disponibilités résiduelles pour chaque marquage).

3.3 Trouver les fréquences de franchissement pour un fonctionnement à vitesse maximale