



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

O. KAMACH

kamach@ensat.ac.ma

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Petit chef 	Manger 
Il dirige les employés	Il les accompagne
Il impose son autorité	Avec intelligence
Il inspire la peur	Il génère l'enthousiasme
Il dit je	Il dit nous
Il appuie sur les erreurs	Il assume et corrige les erreurs
Il sait ce qui est fait	Il montre ce qui doit être fait
Il utilise les gens	Il fait grandir les gens
Il récolte les lauriers	Il distribue les récompense
Il commande	Il demande
IL dit allez y	Il dit allons y

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Définition : définition formelle

Un Réseau de Petri (RdP) Place/Transition est un quintuplet $(P, T, \text{Pré}, \text{Pos}, W)$ dans lequel

- **P** est un ensemble fini non vide d'objets appelés places : $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$;
- **T** est un ensemble fini non vide d'objets appelés transitions : $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$;
- **Pré** est un ensemble de relations (relations d'entrées) qui lie P à T;
- **Pos** est un ensemble de relations (relations de sortie) qui lie T à P
- **W** est une application qui lie à chaque relation un entier > 0 appelé poids de l'arc.

Un RdP est dit **fortement connexe** si tous les sommets possèdent au moins une relation d'entrée et une relation de sortie. Il est **connexe** dans le cas inverse

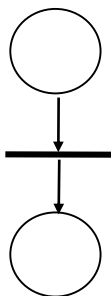
Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Constituant d'un RdP

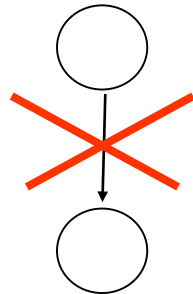
Un réseau de PETRI, est un graphe bi-parties constitué informellement de deux types de nœuds:

- Des places représentés par des cercles
- Des transitions représentées par des barres

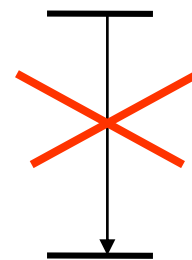
Des arcs relient une place à une transition ou une transition à une place, mais jamais une place à une place ou une transition à une transition



Oui



Non



Non

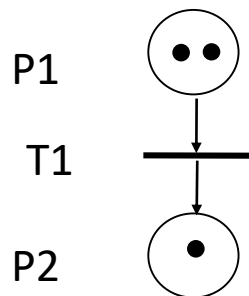
Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Marquage d'un RdP

On associe à un réseaux de Petri un marquage qui représente le nombre (entier) de jetons (ou marques) associés à chaque place

Remarque: On suppose que les places sont d'une capacité infinie

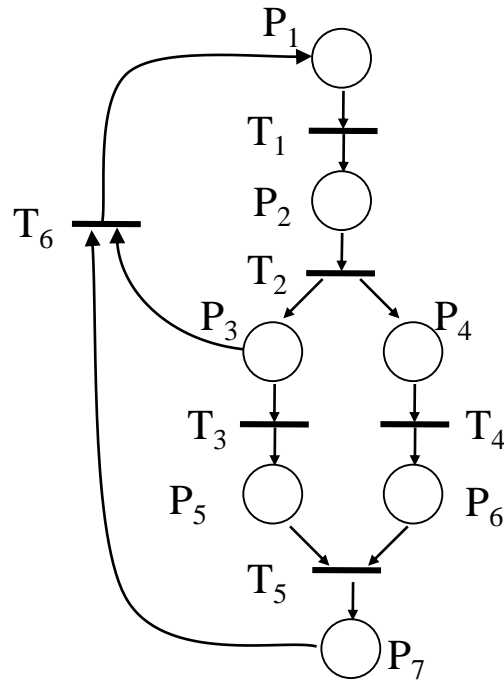
Le marquage, à un instant t , du réseau correspond au nombre de jetons dans chaque place.



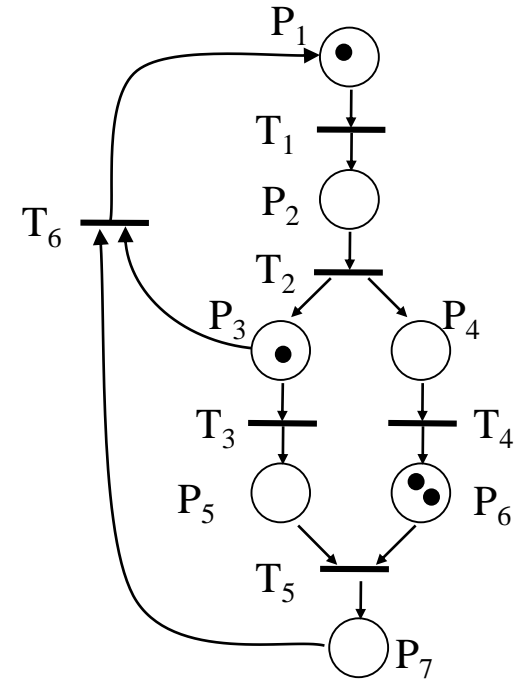
$$M : P \longrightarrow N$$

$$M = [2, 1]$$

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production



a - RdP non marqué



b - RdP marqué

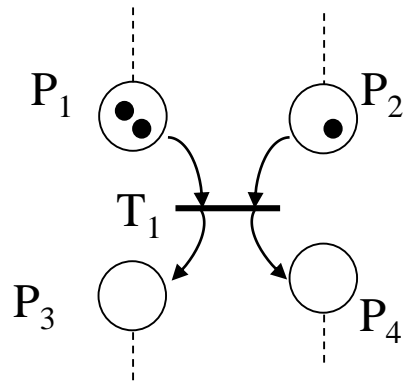
Le marquage à un instant t définit l'état du système décrit par le RdP.

Remarque : Le marquage d'un RdP est numérique (nombre entier) alors que celui d'un Grafcet est booléen (état actif ou inactif) $M = [1, 0, 1, 0, 0, 2, 0]$

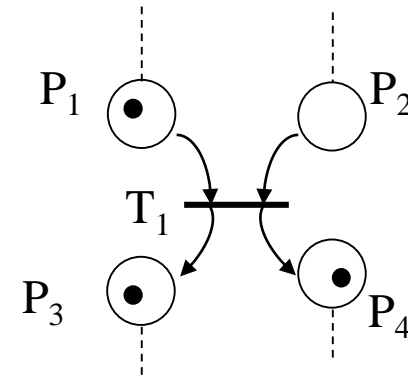
Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Franchissement de transition

Avant franchissement



Après franchissement



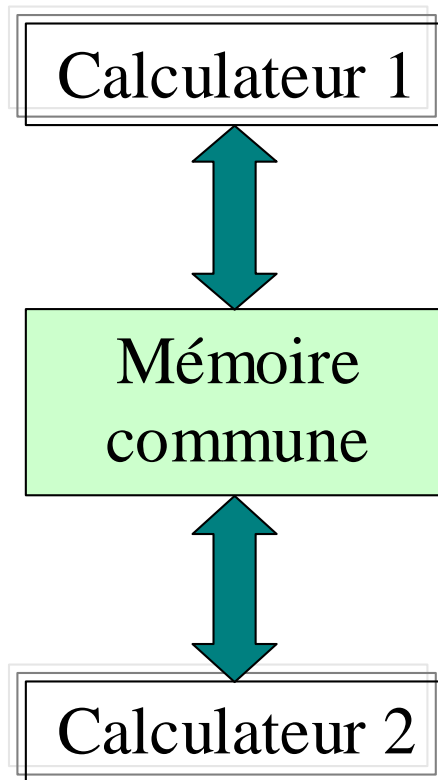
Transition validée T_1 (RdP Ordinaire) : Chacune des places en amont de T_1 contient au moins une marque.

Franchissement d'une transition validée T_1 :

- on retire, une marque a chacune des places en amont de T_1 .
- on ajoute une marque a chacune des places en aval de T_1 .

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

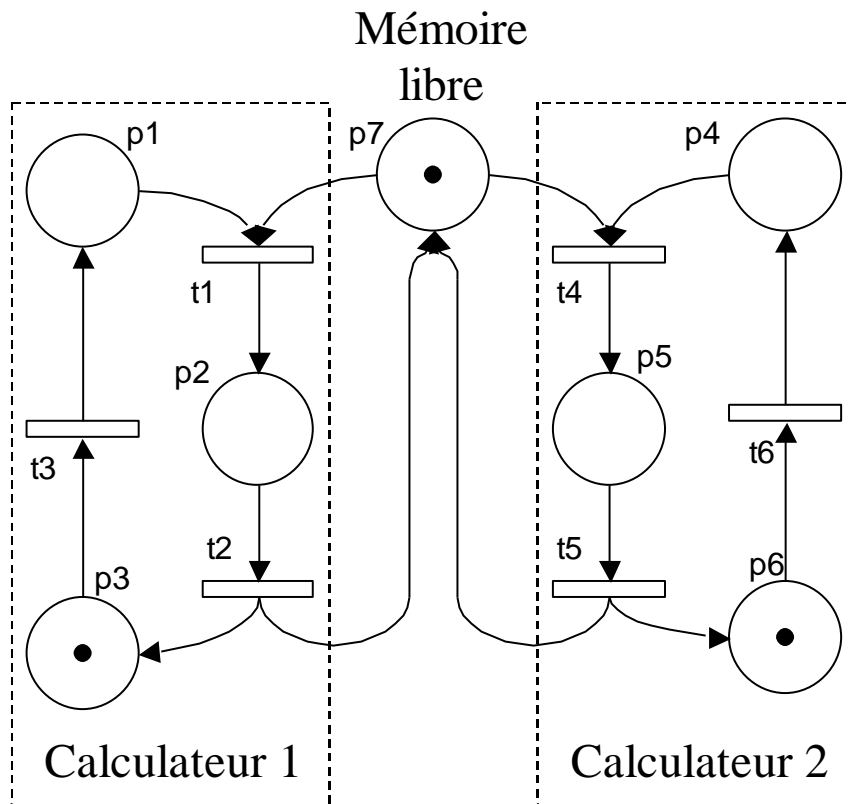
Exemple d'un système



- Une mémoire commune
- Deux calculateurs:
 - N'a pas besoin de la mémoire
 - Demande la mémoire
 - Utilise la mémoire

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

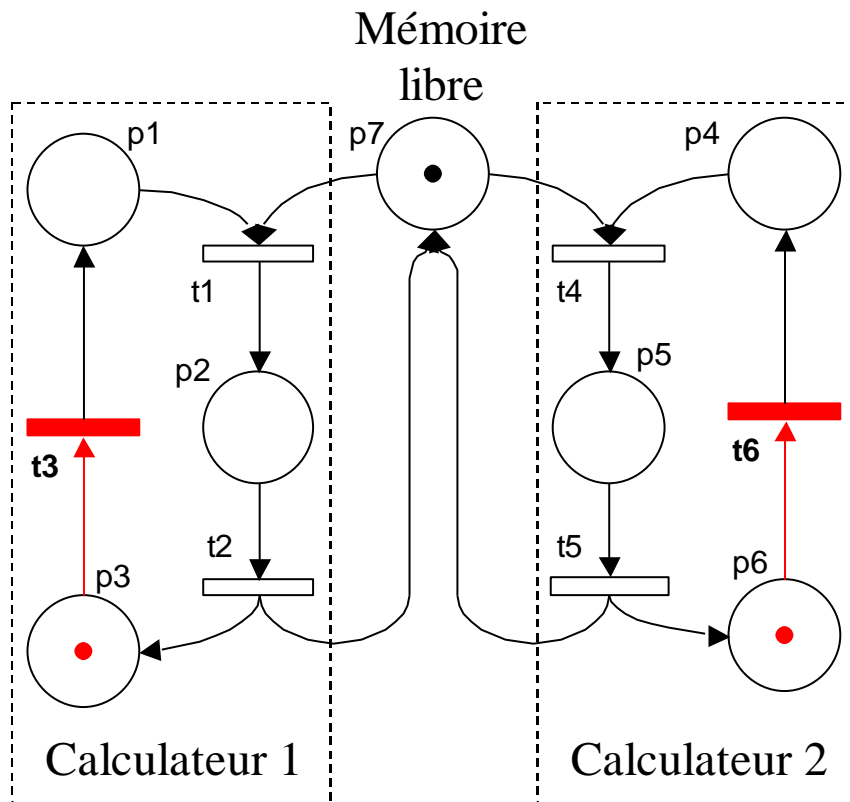
Exemple d'un système : modèle RdP de ce système



- Graphe orienté à bipartie:
 - Transitions (t1-t6)
 - Places (p1-p7) contiennent un nombre non-négatif de jetons
 - Arcs liant deux sommets de nature différente
- Sémantique
 - Transitions représentent les évènements
 - Marquage des places représente l'état du système

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

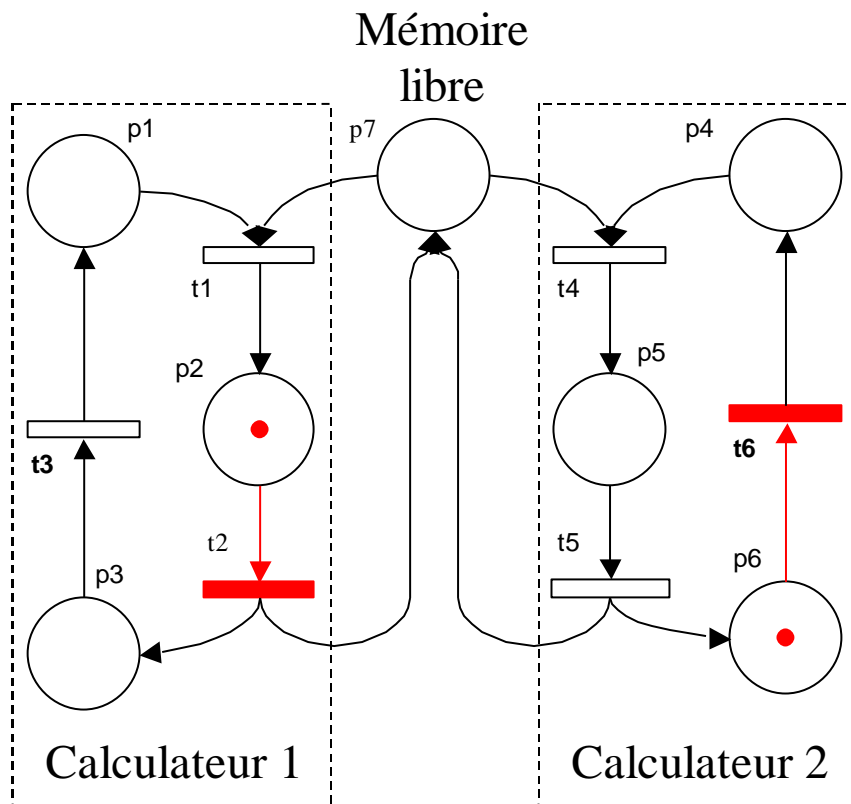
Fonctionnement du système



- Le marquage du réseau évolue au cours du franchissement des transitions
 - Le franchissement d'une transition est fonction des conditions des ressources des places amont
 - Une transition est dite validée, dans un marquage, si, dans chaque place amont le nombre de jetons est au moins égal au poids de l'arc sortant

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Fonctionnement du système

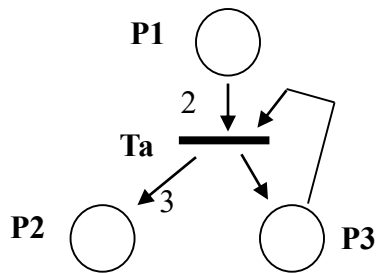


- Le franchissement de la transition validée consiste à :
 - Enlever des jetons des places amont (le nombre est égal au poids de l'arc amont)
 - Ajouter des jetons aux places aval (le nombre est égale au poids de l'arc aval)

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

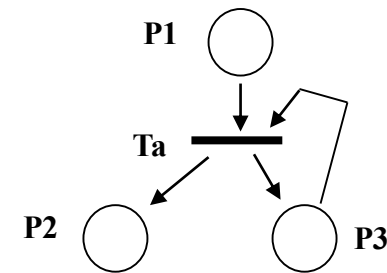
RdP généralisé et ordinaire

- Un réseau dans lequel le poids affecté à chaque arc est égal à 1 est un réseau de Petri élémentaire (ordinaire).
- Un Réseau de Petri dans lequel le poids de certains arcs est supérieur à 1 est un Réseau de Petri Généralisé



$$W : A \longrightarrow \mathbb{N}^+$$

réseau de Petri généralisé



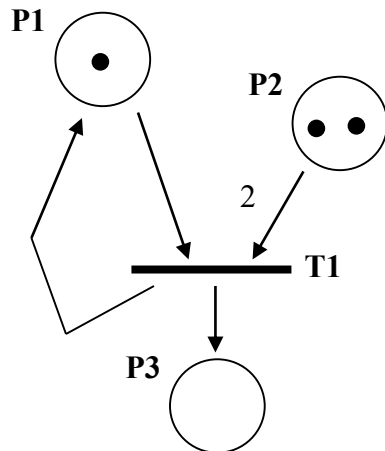
$$W : A \longrightarrow \{0, 1\}$$

réseau élémentaire

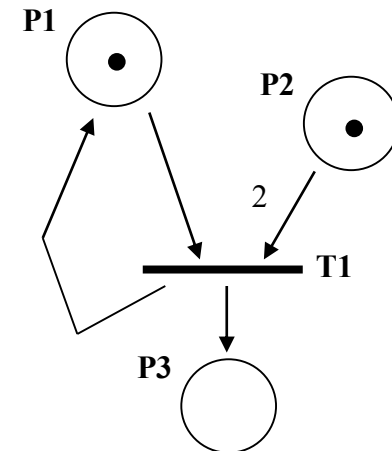
Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Validation d'une transition : RdP généralisé

Une transition est validée si chacune des places en entrée de la transition contient au moins autant de jetons que le poids affecté à l'arc reliant la place à la transition.



T1 validée

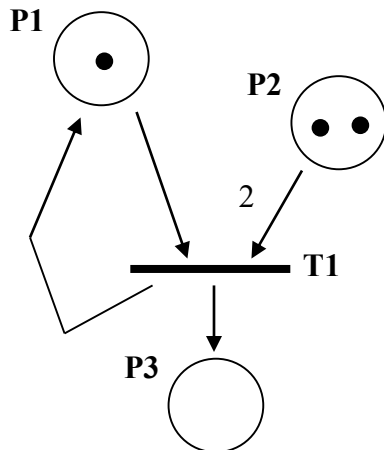


T1 non validée

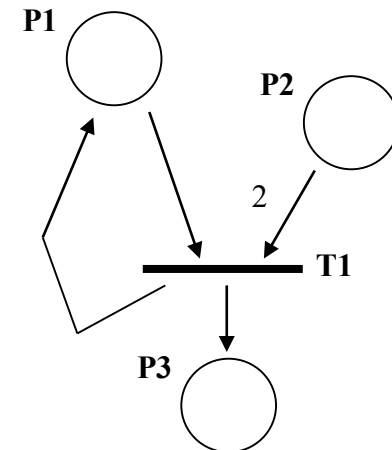
Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Franchissement de transition

Le franchissement d'une transition consiste à enlever de chacune des places amont un nombre de marques égal au poids de l'arc reliant cette place à la transition franchie.



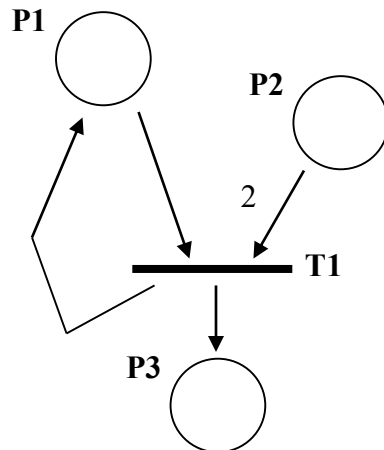
Franchissement de T1



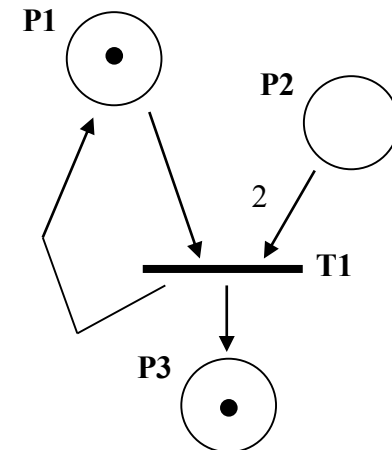
Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Franchissement de transition

Après franchissement d'une transition on rajoute dans chacune des places aval un nombre de jetons égal au poids de l'arc reliant cette place à la transition franchie.



Franchissement de T1

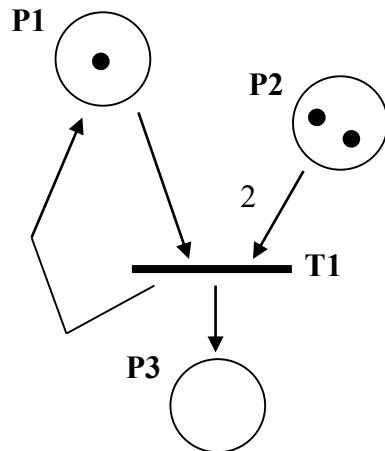


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Franchissement de transition

Marquage avant Franchissement

$$M_0 = [1, 2, 0]$$

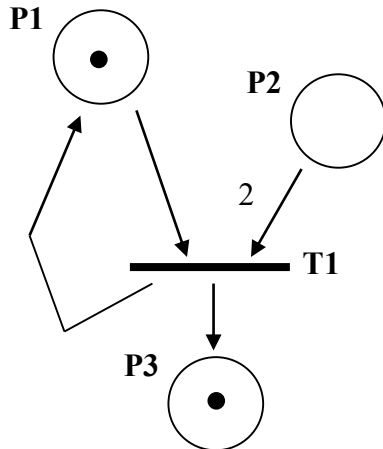


Définition : marquage atteignable

Un marquage quelconque M_a est dit atteignable à partir de M_0 ssi il existe une séquence de tir s qui de M_0 permet d'obtenir le marquage M_a . On appelle $A(R, M_0)$ l'ensemble de tous les marquages atteignables depuis M_0 .

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Franchissement d'une transition



Marquage avant Franchissement

$$M0 = [1, 2, 0]$$

Marquage après Franchissement

$$M1 = [1, 0, 1]$$

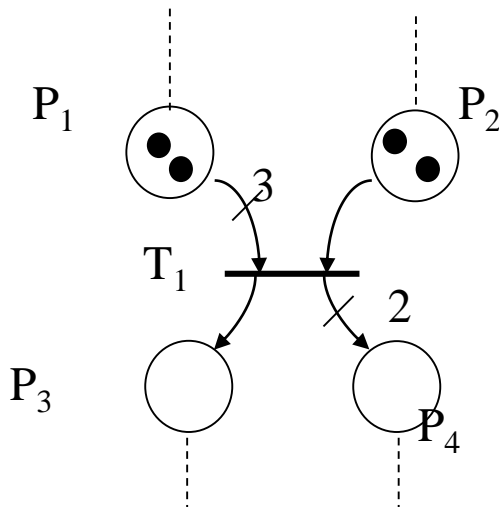
En t_0 , il y avait 3 jetons dans le réseau ; en $t_0 + \Delta t$, il y en a 2.

Attention: Il n'y a pas de principe de conservation des jetons. Le nombre de jetons produits n'est pas lié au nombre de jetons consommés.

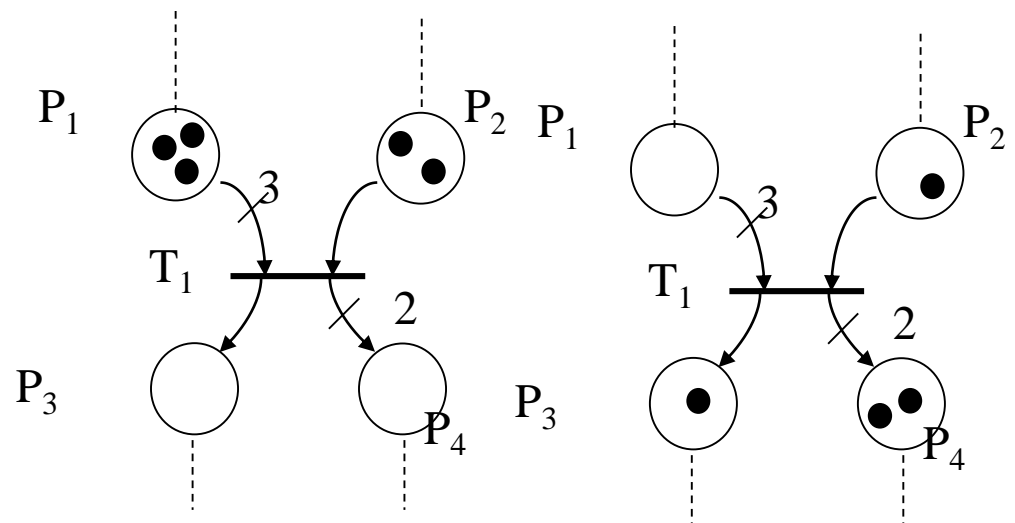
Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

RdP généralisé : synthèse

T1 non validée



T1 validée



Avant
franchissement

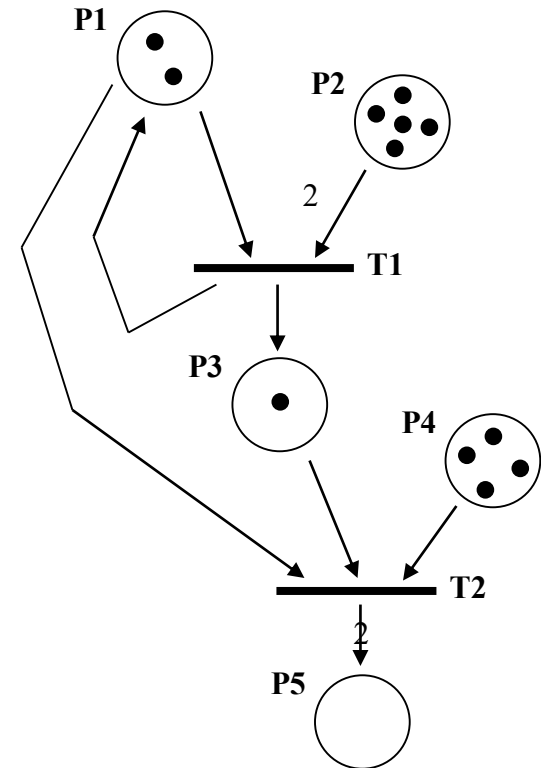
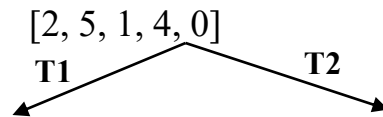
Après
franchissement

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

T1 et T2 sont franchissables.

Hypo H1 : le moniteur choisit T1

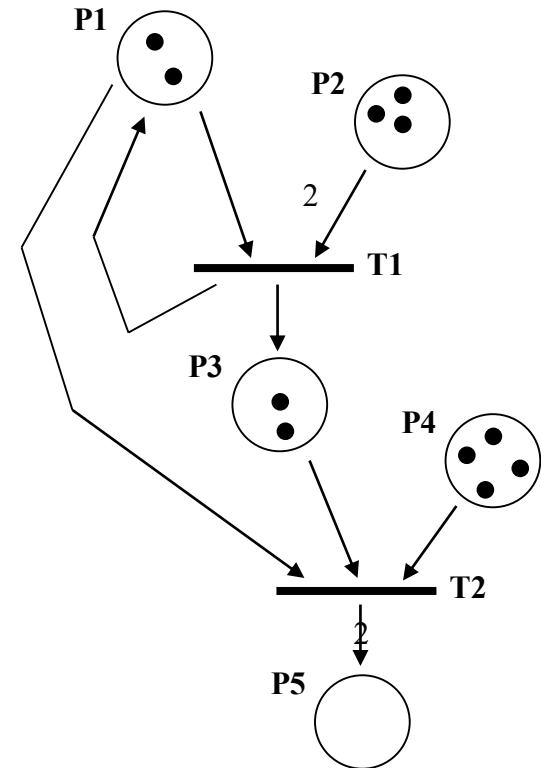
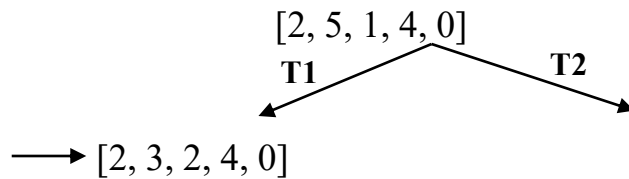


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

T1 et T2 sont franchissables.

Hypo H1 : le moniteur choisit T1

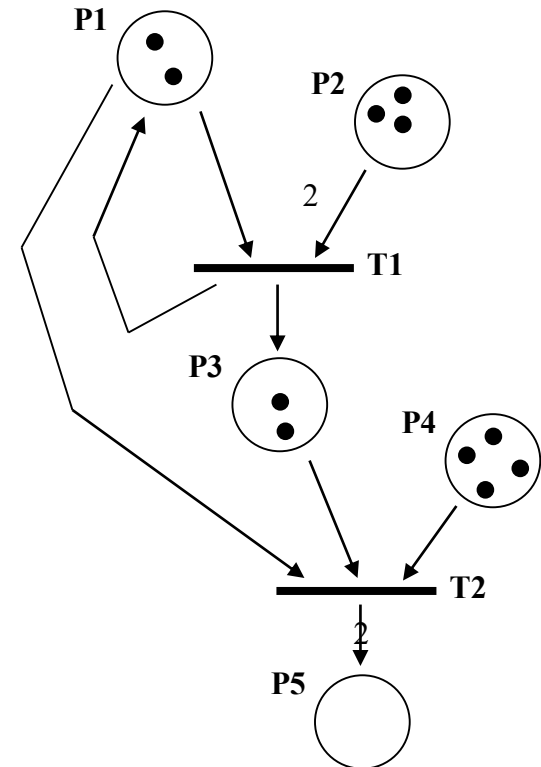
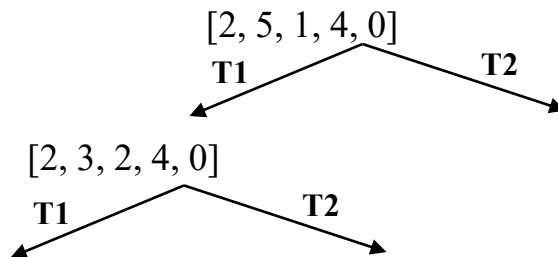


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

T1 et T2 sont encore franchissables.

On peut continuer sur cette « branche ».

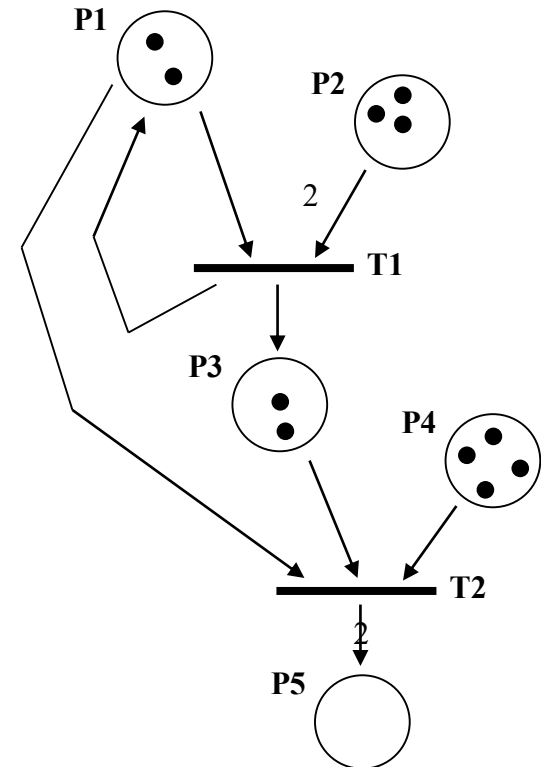
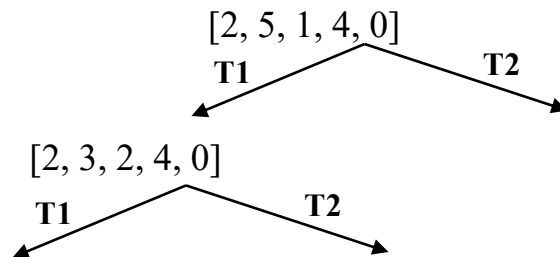


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

T1 et T2 sont encore franchissables

Hypo H2 : le moniteur choisit T1

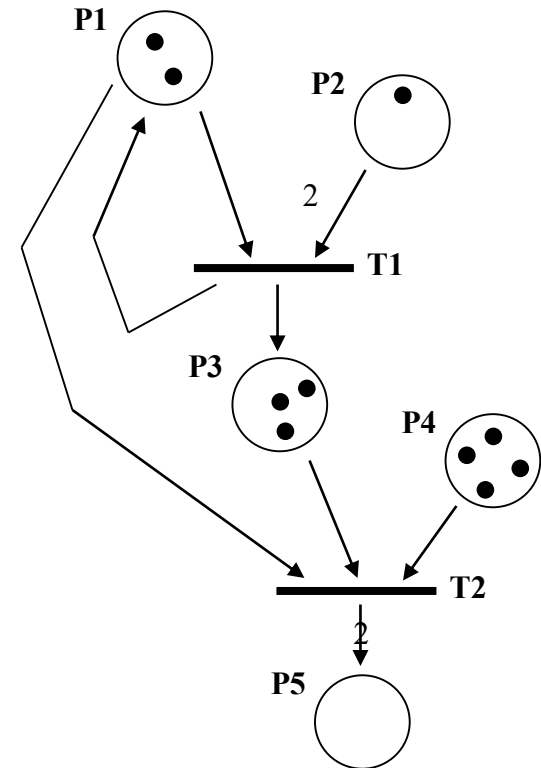
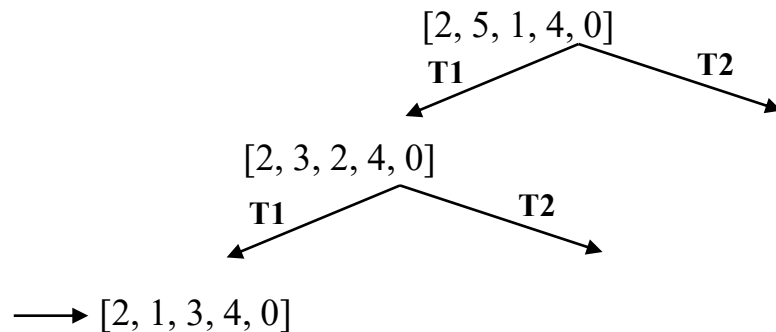


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

T1 et T2 sont encore franchissables

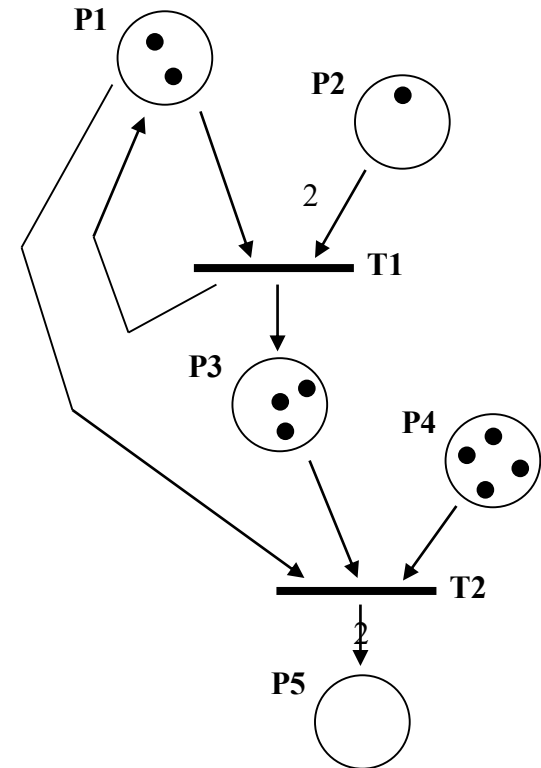
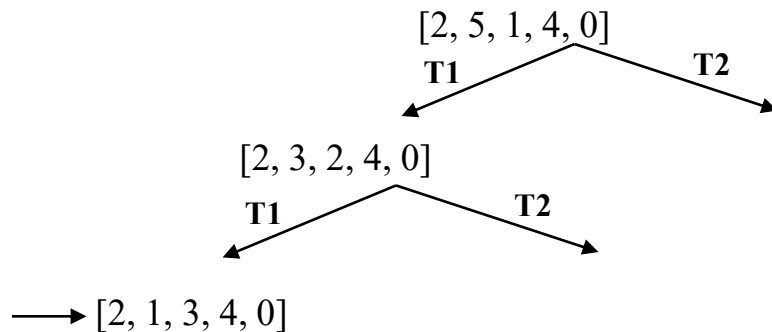
Hypo H2 : le moniteur choisit T1



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

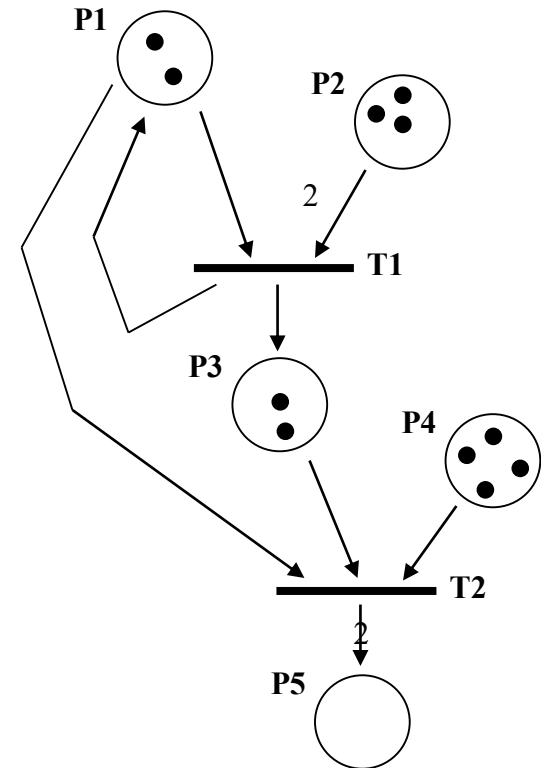
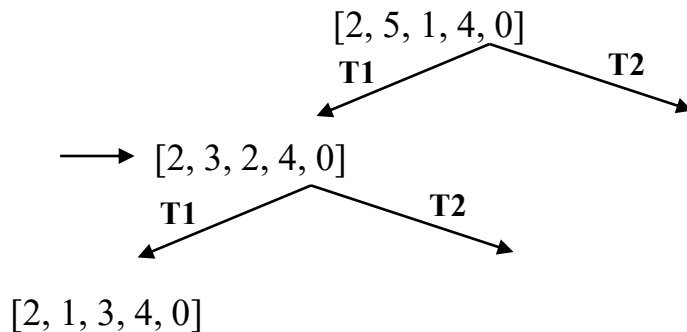
Revenons un pas en arrière.



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

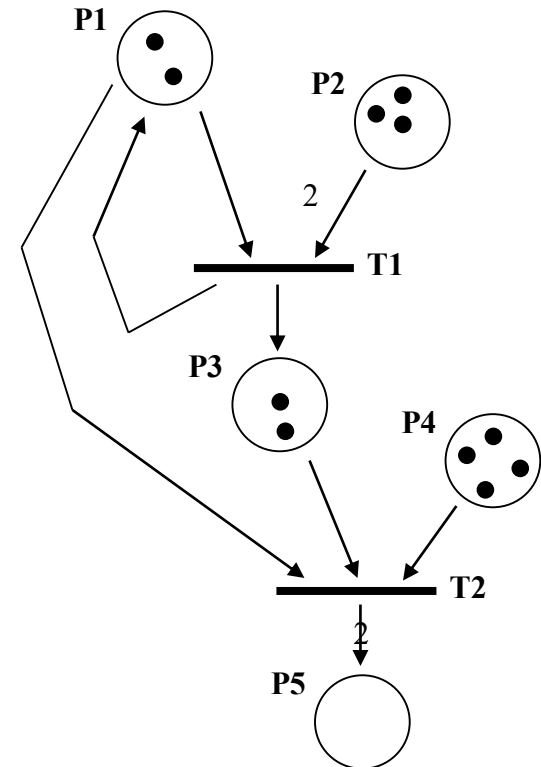
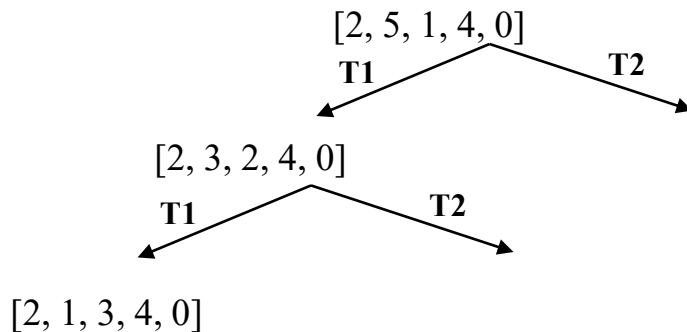
Revenons un pas en arrière.



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

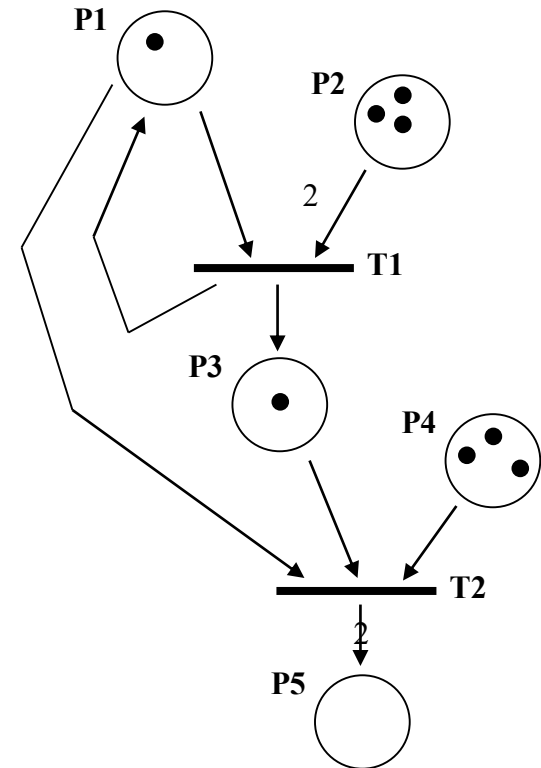
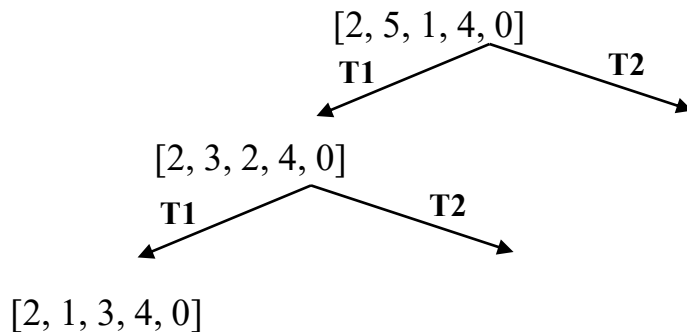
Hypo H3 : le moniteur choisit T2



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

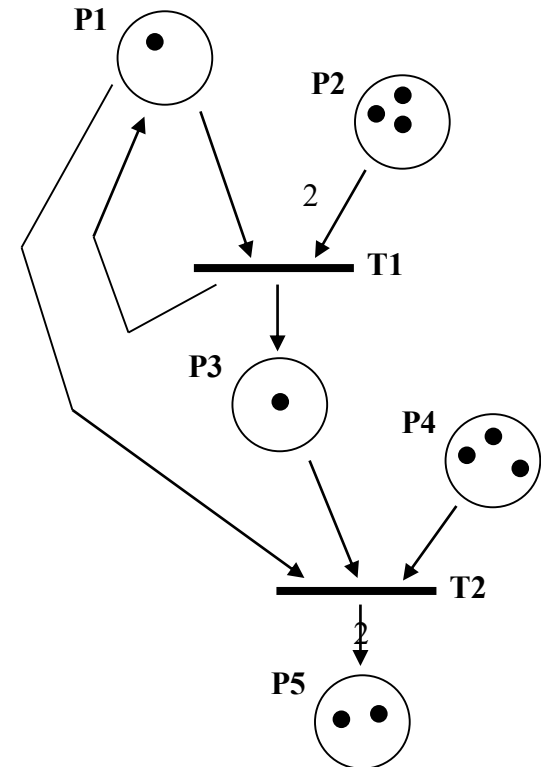
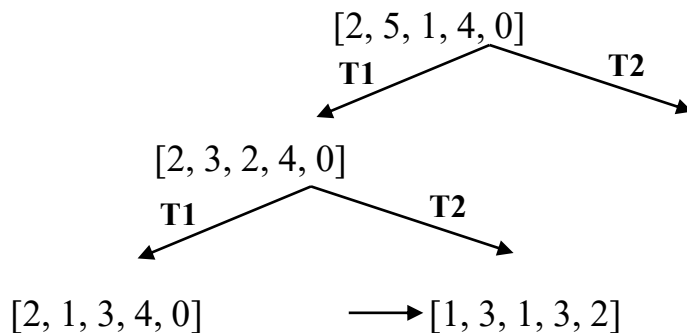
Hypo H3 : le moniteur choisit T2



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

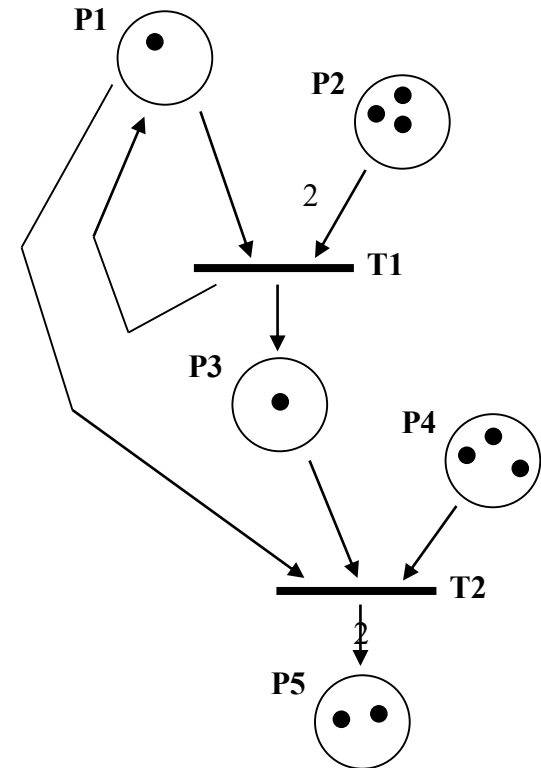
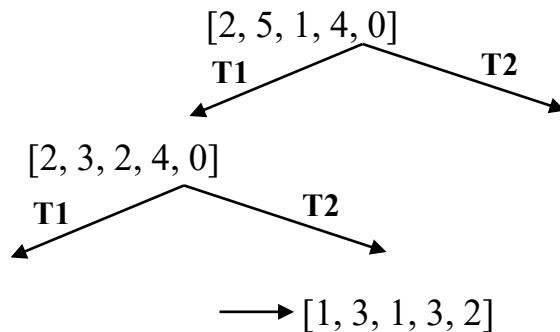
Hypo H3 : le moniteur choisit T2



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

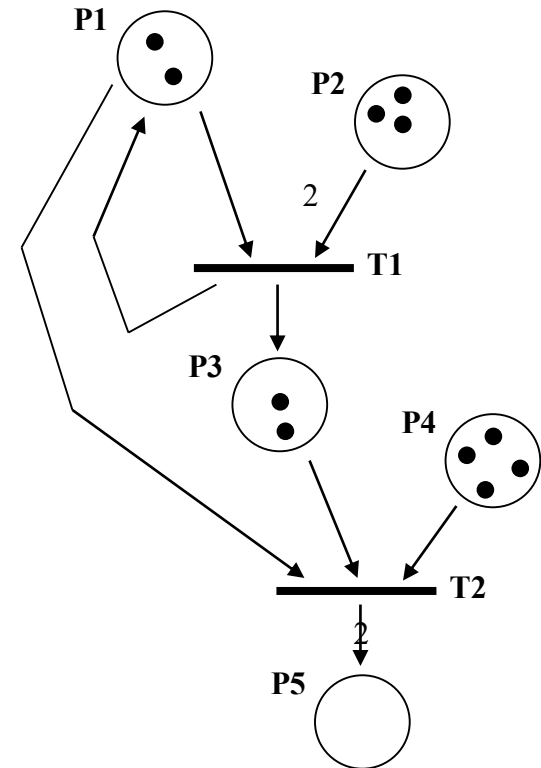
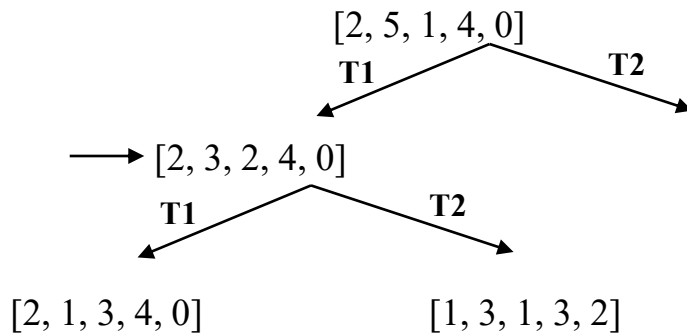
Revenons deux pas en arrière.



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

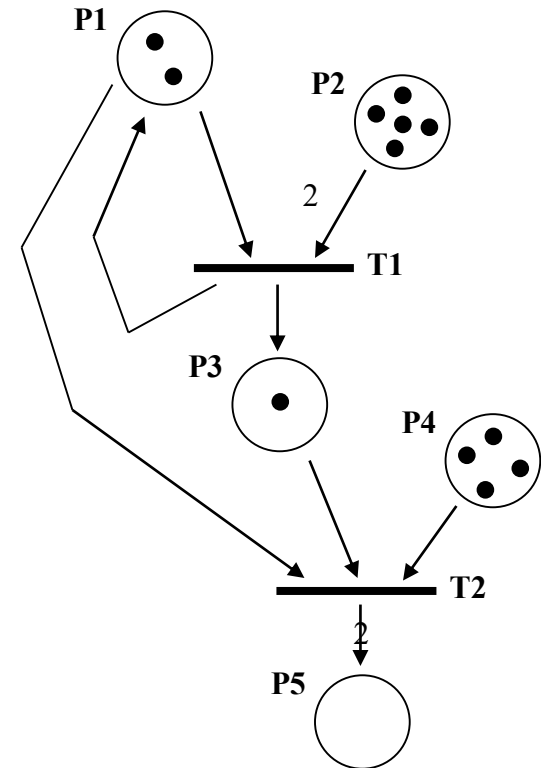
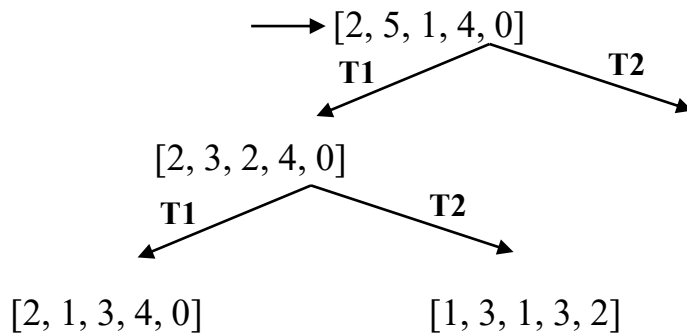
Revenons deux pas en arrière.



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

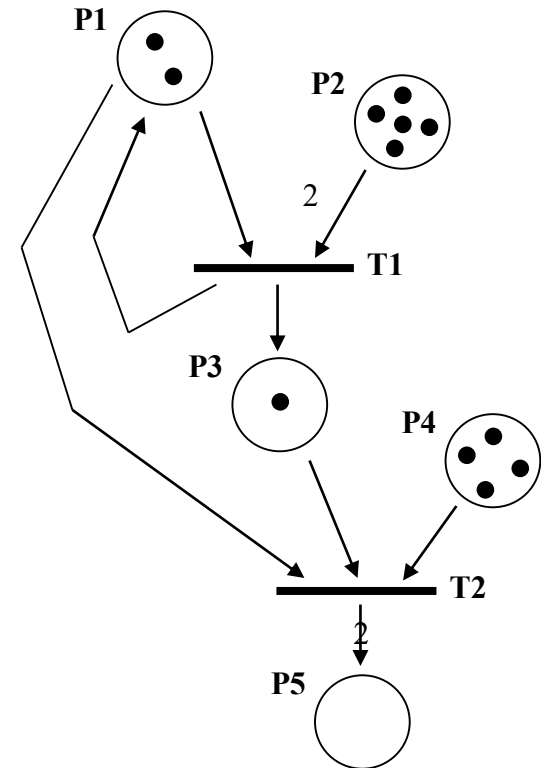
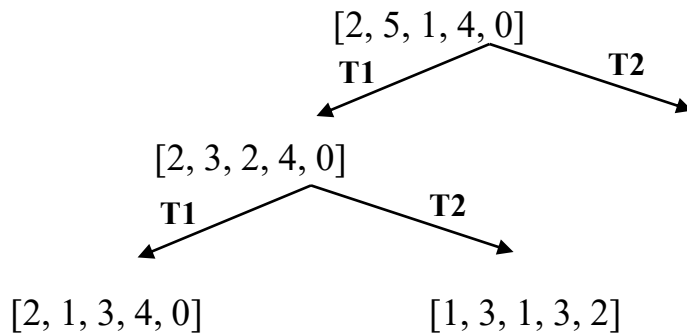
Revenons deux pas en arrière.



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

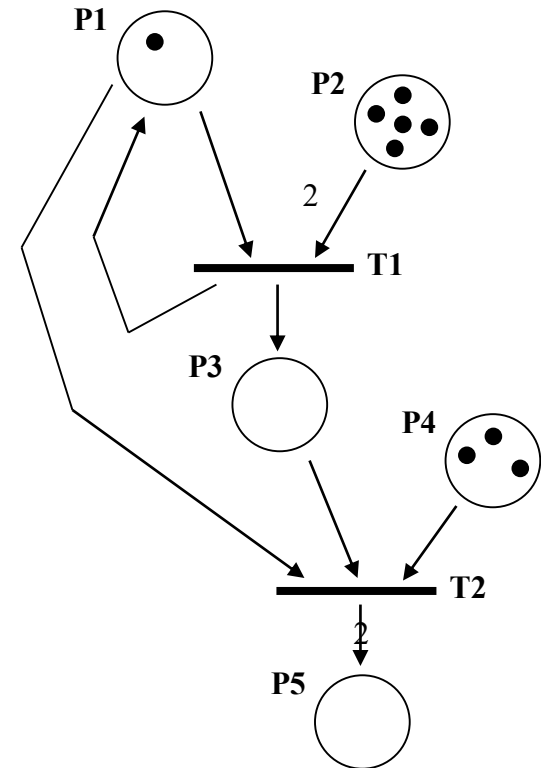
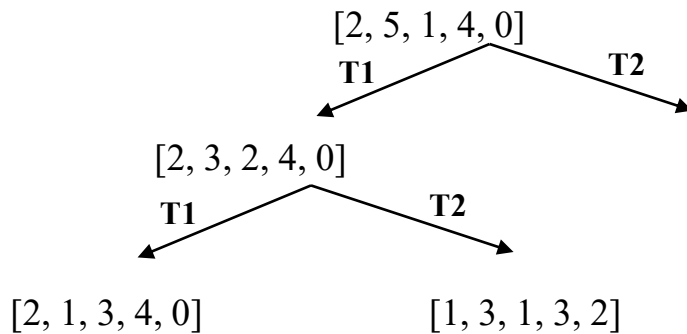
Hypo H4 : le moniteur choisit T2



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

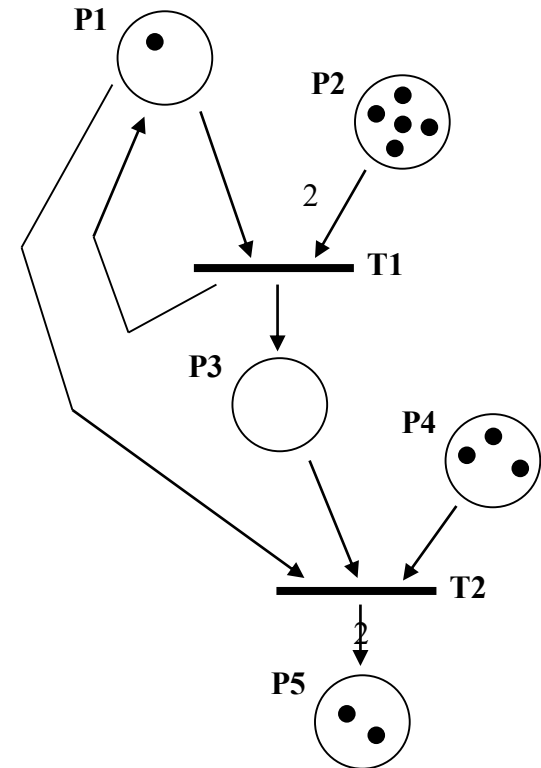
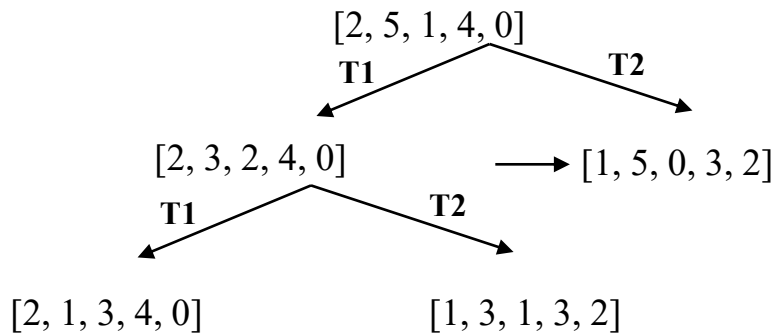
Hypo H4 : le moniteur choisit T2



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

Hypo H4 : le moniteur choisit T2

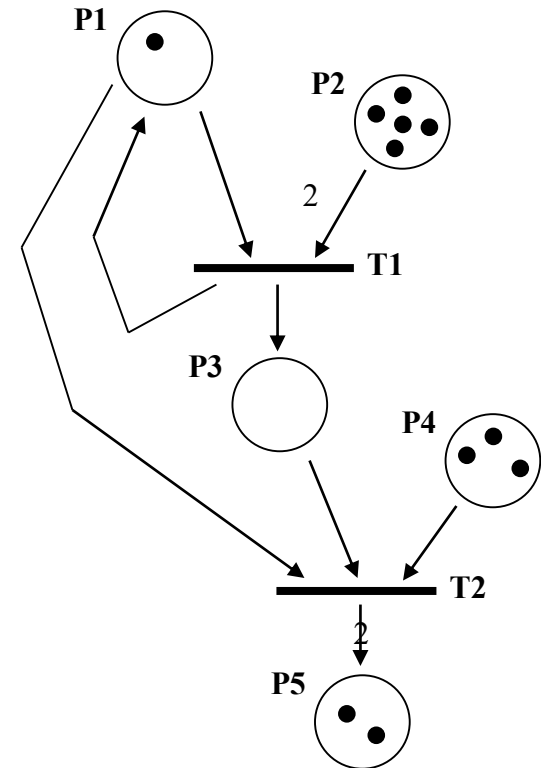
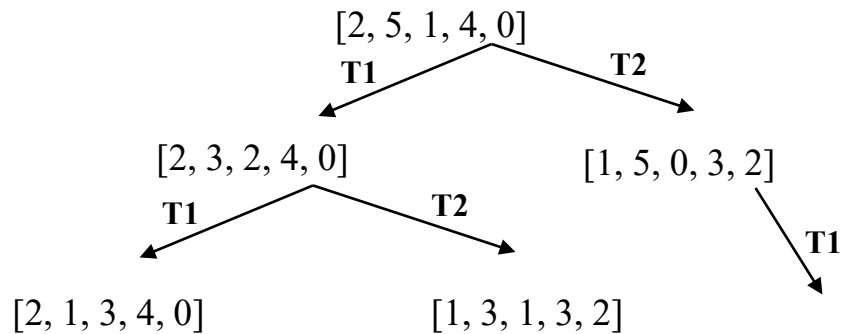


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

Seule, T1 est franchissable.

Continuons sur cette dernière branche.

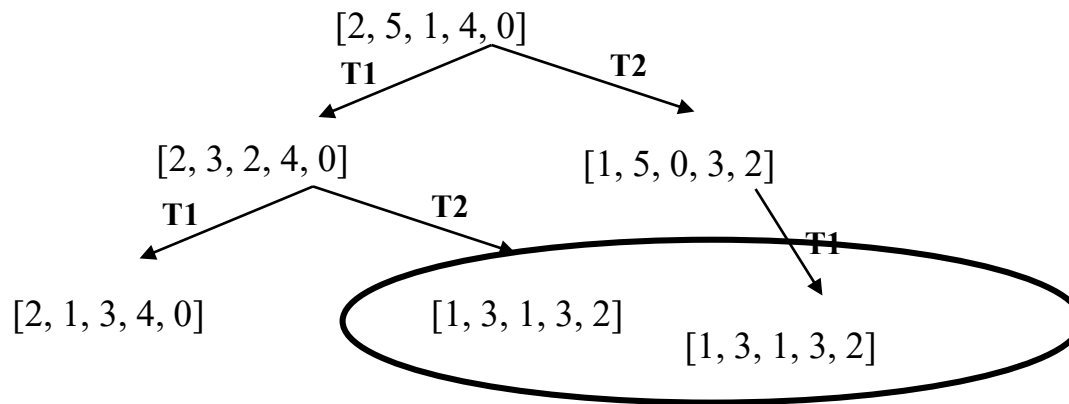


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

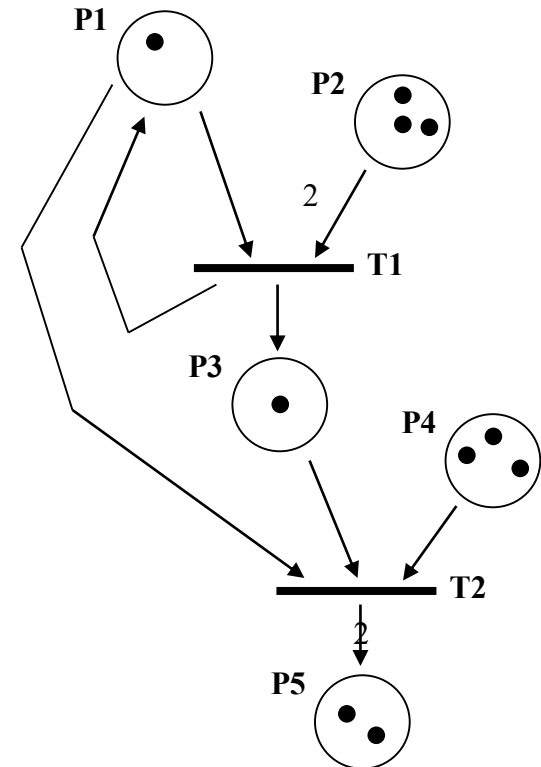
Graphe de marquage

Seule, T1 est franchissable.

Continuons sur cette dernière branche.



C'est le même vecteur !

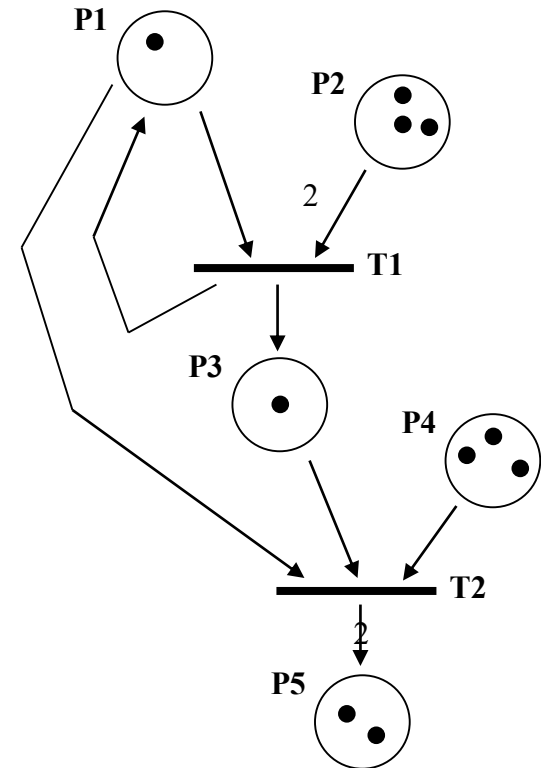
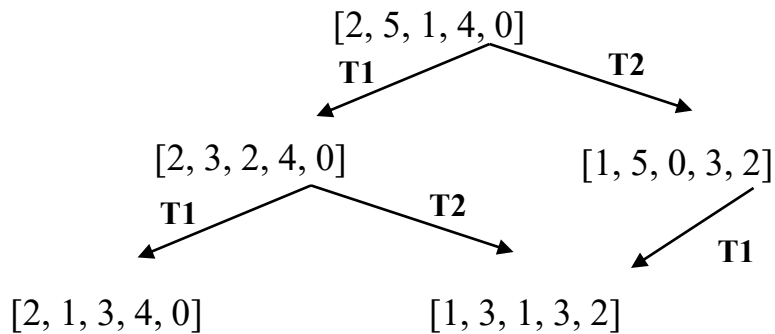


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Graphe de marquage

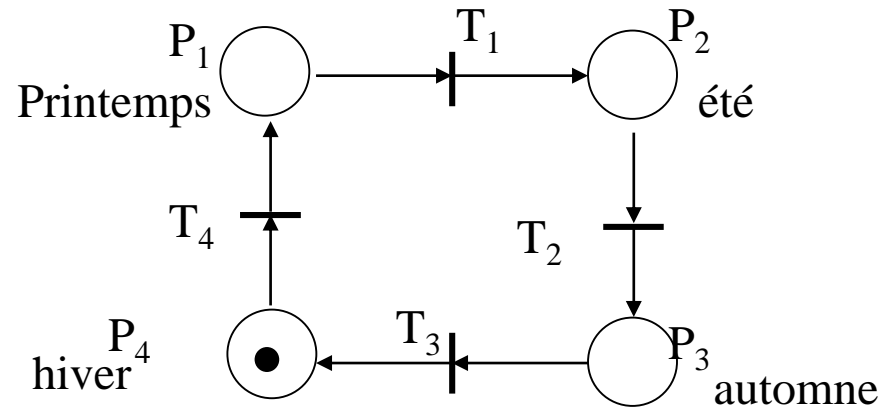
Seule, T1 est franchissable

Continuons sur cette dernière branche.



Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

RdP autonome

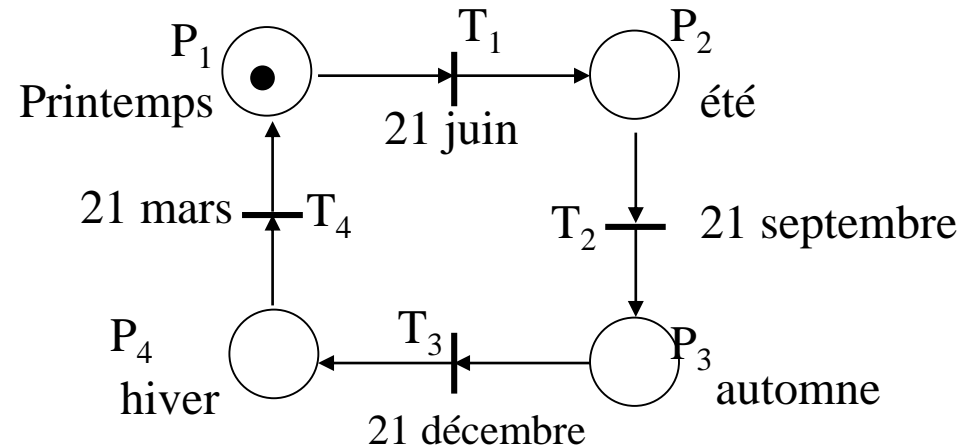


Cycle des saisons

Un RdP autonome décrit le fonctionnement d'un système qui évolue de façon autonome. c'est-à-dire dont les instants de franchissement ne sont pas connus on pas indiqués.

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

RdP non autonome



Cycle officiel des saisons

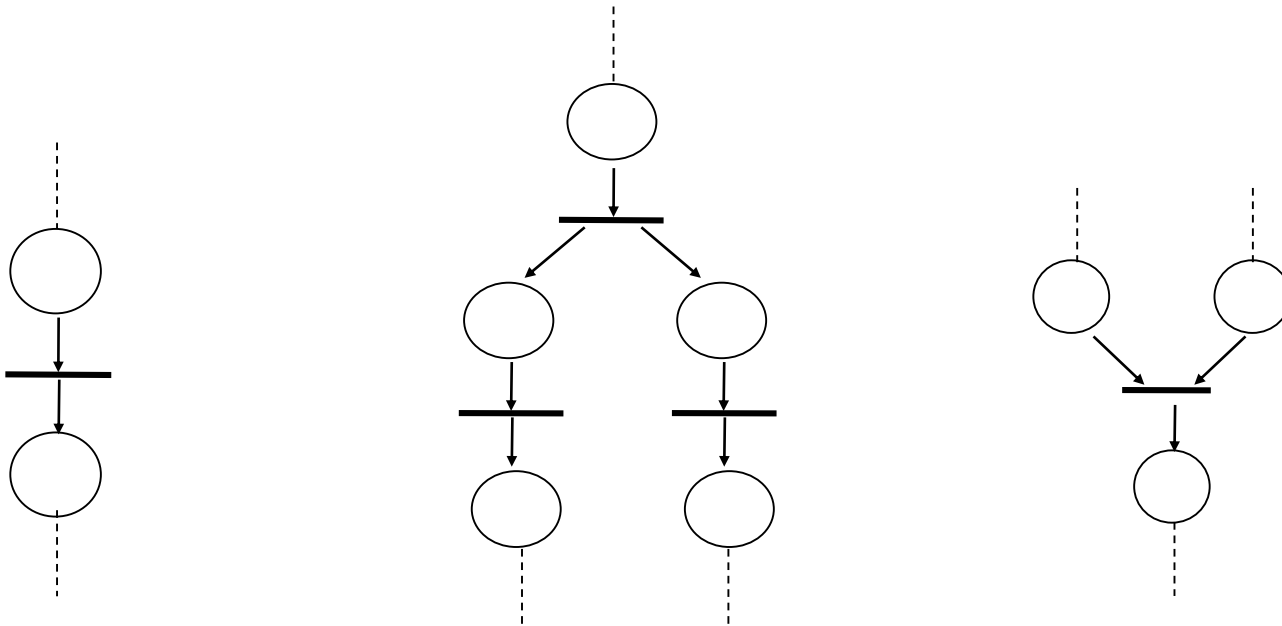
Un RdP non autonome décrit le fonctionnement d'un système dont l'évolution est conditionnée par des événements externes ou par le temps. Un RdP non autonome est synchronisé et/ou temporisé

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Structure particulière

Graphe d'événements

Un graphe d'événements est un RdP tel que chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie.

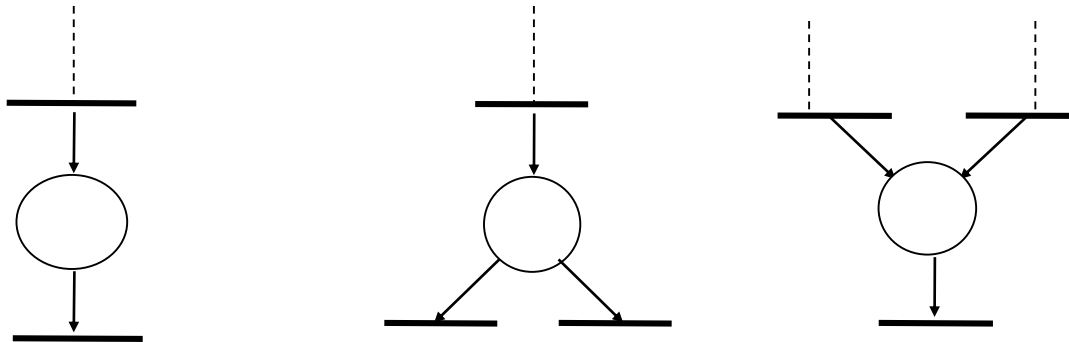


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Structure particulière

Graphe d'états

Un graphe d'états est un RdP tel que chaque transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie.

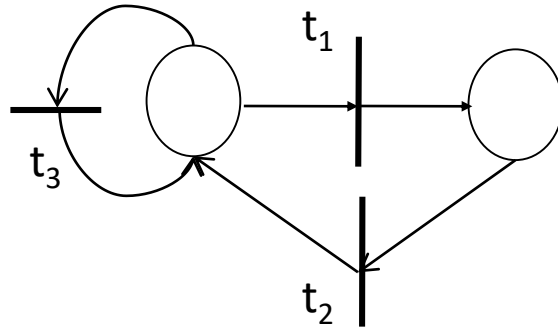


Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Définition : RdP pur

Dans une boucle élémentaire, une place P est à la fois place d'entrée et de sortie d'une transition

Exemple



Un RdP pur est un RdP sans boucle élémentaire.

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

RdP à arcs inhibiteurs

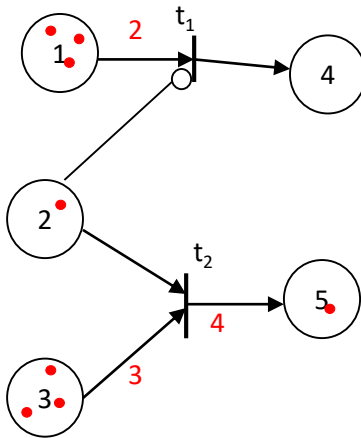
Un RdP à arcs inhibiteur est un doublet $\langle R, F \rangle$ avec :

R = Réseau généralisé

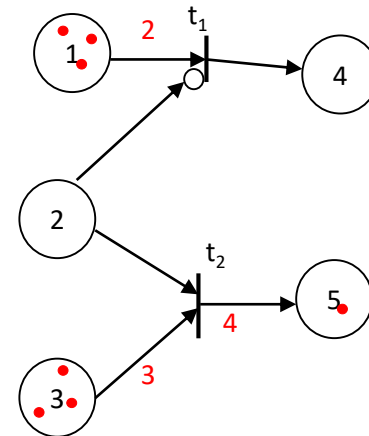
F = ensemble d'arcs inhibiteurs de poids unitaire.

Une transition t_i est sensibilisée ssi, en plus des règles habituelles, il n'existe aucune marque dans des places d'entrées reliées à t_i par un arc inhibiteur. Les marquages obtenus après franchissement de la transition t_i sont identiques au cas des réseaux de Petri généralisés.

Exemple :



RdP à arcs inhibiteurs : t_1 non tirable, t_2 tirable.



RdP à arcs inhibiteurs : t_1 tirable, t_2 non tirable.

Modélisation et Simulation des Systèmes de Production

Exemple d'application : arcs inhibiteurs

Cahier des charges :

Une administration fait entrer ces clients puis ferme la porte d'entrée avant de commencer le service.

Au fur et à mesure qu'ils sont servis les clients sortent par une autre porte.

La porte d'entrée ne sera ré-ouverte que lorsque tous les clients qui étaient entrés seront sortis.

Propriétés liées au marquage

3.1 Bornage

3.1.1 Place bornée pour M_0

Une place p d'un RdP est dite bornée pour un marquage initial M_0 , ssi :

$$\forall M_i \in A(R, M_0), \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } M_i(p) \leq k$$

$M_i(p)$ est le nombre de marques (ou jetons) dans p et l'entier positif k est appelé borne de p (on dit que p est k bornée).

3.1.2 Réseau borné pour M_0

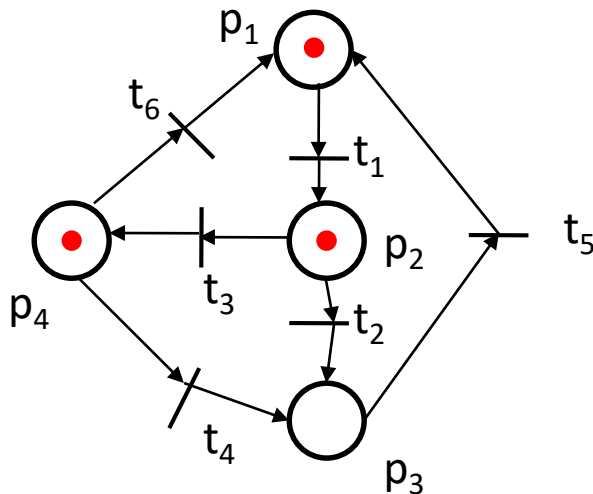
Pour un marquage initial M_0 , un RdP est borné ssi toutes ses places sont bornées pour M_0 . Autrement dit, un RdP est borné pour M_0 ssi $\forall p, \forall M \in A(R, M_0), \exists$ un entier k $M(p) \leq k$. L'entier positif k est la valeur maximum des bornes de l'ensemble des places du réseau.
(le réseau est k -borné si toutes les places sont k -bornées).

Propriétés liées au marquage

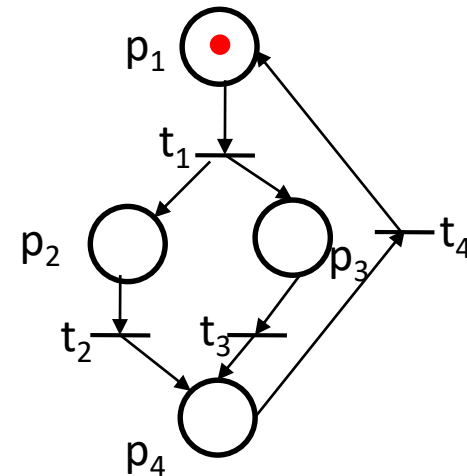
3.1 Bornage

De façon équivalente, cela signifie que $\forall M_i$ aucune place ne contient plus de k marques.

Exemple



RdP borné par $k = 3$



RdP non borné

Propriétés liées au marquage

3.1 Bornage

Remarque : La notion de bornage ainsi définie n'est pas une propriété structurale car elle dépend du marquage initial M_0 . Donc, un réseau borné pour M_0 , peut parfaitement être non borné pour $M'_0 \neq M_0$

Exemple :

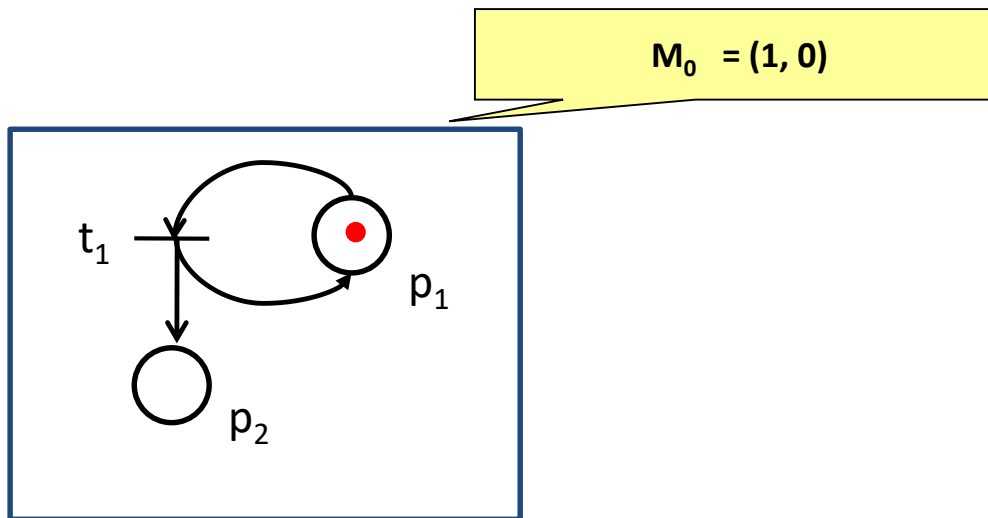


Fig a : RdP non borné

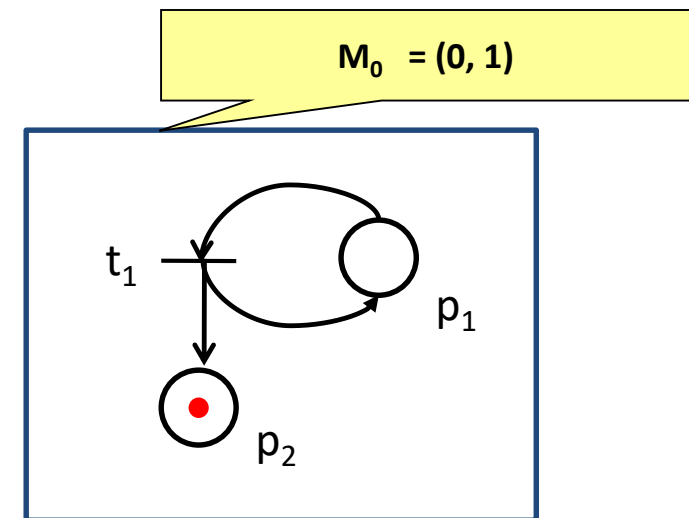


Fig a : RdP borné

Propriétés liées au marquage

3.1 Bornage

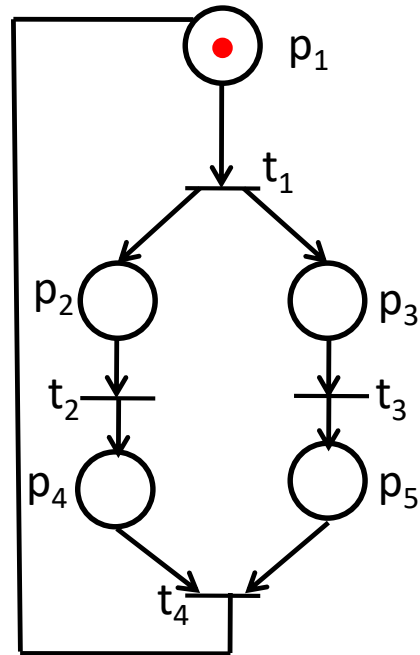
La notion de bornage exprime le fait que le nombre d'états que peut prendre le système est fini. Dans le cas contraire, le nombre d'états est infini parce que certains paramètres sont non bornés : par exemple, on utilise un buffer de taille non spécifiée, un producteur dépose des objets dans un entrepôt dont la taille n'est pas fixée...

Propriétés liées au marquage

3.2 Réseau sauf pour M_0

Un RdP est dit **sauf (ou binaire)** pour un marquage initial M_0 , si et seulement si il est borné par $k=1$. Autrement dit si pour chaque marquage accessible, chaque place contient au plus une marque. Un RdP sauf est un cas particulier du RdP borné dont toutes les places sont 1 bornée.

Exemple : Le RdP ci-après est-il-sauf ?



Propriétés liées au marquage

3.3 Vivacité

Certains systèmes (on peut penser par exemple aux systèmes d'exploitation ou à des systèmes de contrôle de procédé) se doivent de ne pas perdre de fonctionnalités en cours de vie. Il s'agit de garantir qu'aucune action ne peut devenir définitivement inaccessible.

Définition :

Une transition T_i est vivante pour un marquage initial M_0 ssi $\forall M \in A(R, M_0), \exists$ une séquence de franchissement s comprenant la transition T_i et tirable à partir de M .

Définition :

Un RdP est dit vivant pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont vivantes pour M_0 .

Autrement dit, si un RdP est vivant, cela signifie que, quelle que soit l'évolution, aucune transition ne deviendra définitivement infranchissable. On dit qu'un RdP est **conforme** s'il est sauf et vivant

Propriétés liées au marquage

3.3 Vivacité

Exemple : Les RdP de la figure a et b sont ils vivants

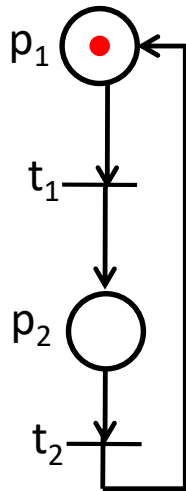


fig. a

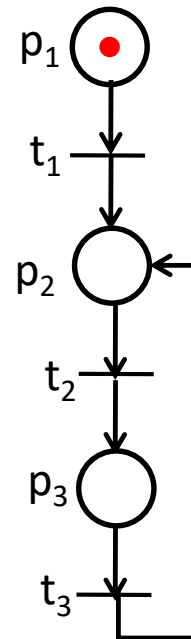


fig. b

Propriétés liées au marquage

3.4 quasi-Vivacité

Cette fois on veut exprimer le fait que toutes les actions spécifiées peuvent être exécutées au moins une fois. Dans le cas contraire, cela signifie qu'il existe des fonctionnalités du système auxquelles on n'a pas accès.

Définition :

Une transition T_j est quasi vivante pour un marquage initial M_0 , s'il existe une séquence de franchissement qui contient T_j , à partir de M_0 .

Un RdP est quasi vivant si toutes ses transitions sont quasi-vivantes.

Propriétés liées au marquage

3.4 quasi-Vivacité

Exemple :

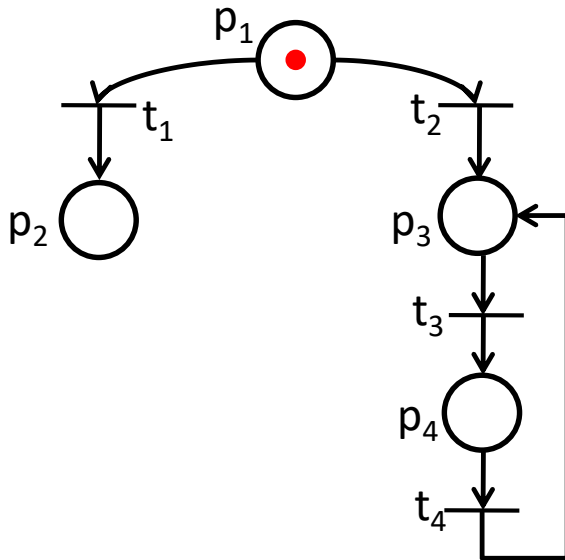


fig. a RdP quasi-vivant avec blocage

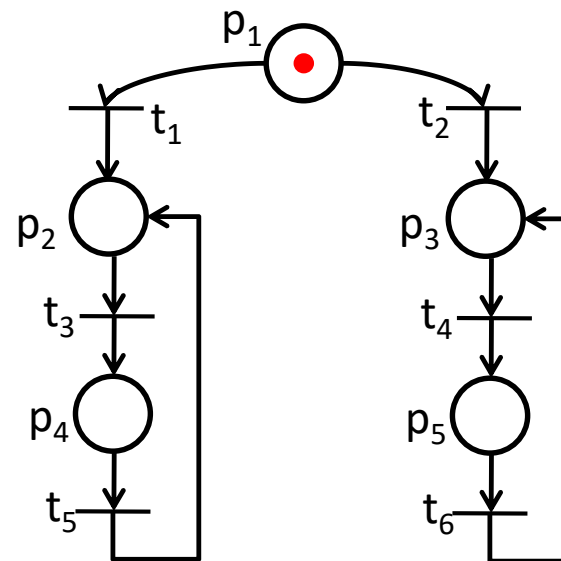


fig. b RdP quasi-vivant sans blocage

Propriétés liées au marquage

3.5 pseudo-Vivacité

Définition :

Un RdP est dit pseudo-vivant pour un marquage initial M_0 si
 $\forall M \in A(R, M_0), \exists t \in T \text{ t.q } M[t >$.

Autrement dit, Un RdP est pseudo-vivant ssi tout marquage accessible admet un successeur.

Exemple :

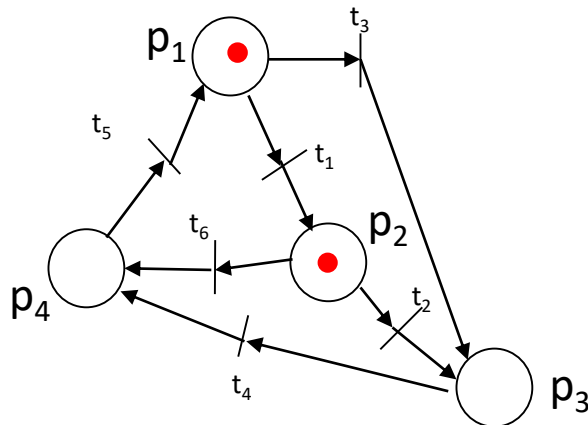


fig. RdP pseudo-vivant

Propriétés liées au marquage

3.6 Blocage

Définition :

Un réseau de Petri est sans blocage si à partir de tout marquage accessible, il existe au moins une transition franchissable : $\forall M \in A(R, M_0), \exists t \in T \text{ tq } M[t>$. Dans le cas contraire, tout marquage accessible à partir duquel on ne peut pas tirer aucune transition est appelé marquage **mort**.

Exemple :

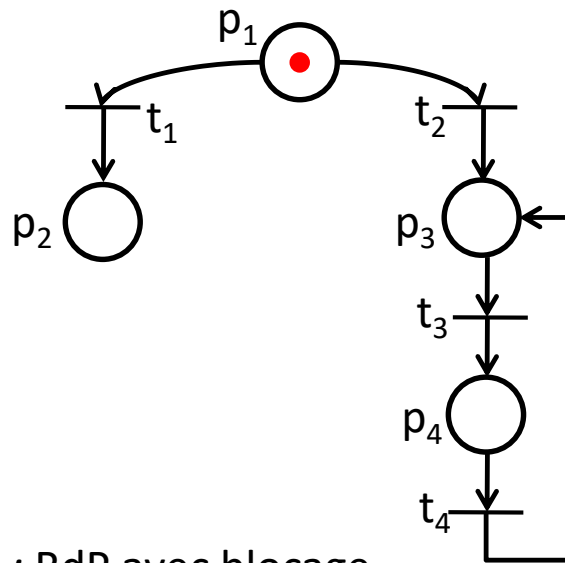


Fig a : RdP avec blocage

Propriétés liées au marquage

Remarque :

Les propriétés de vivacité et de blocage dépendent de façon évidente du marquage initial.

Exemple :

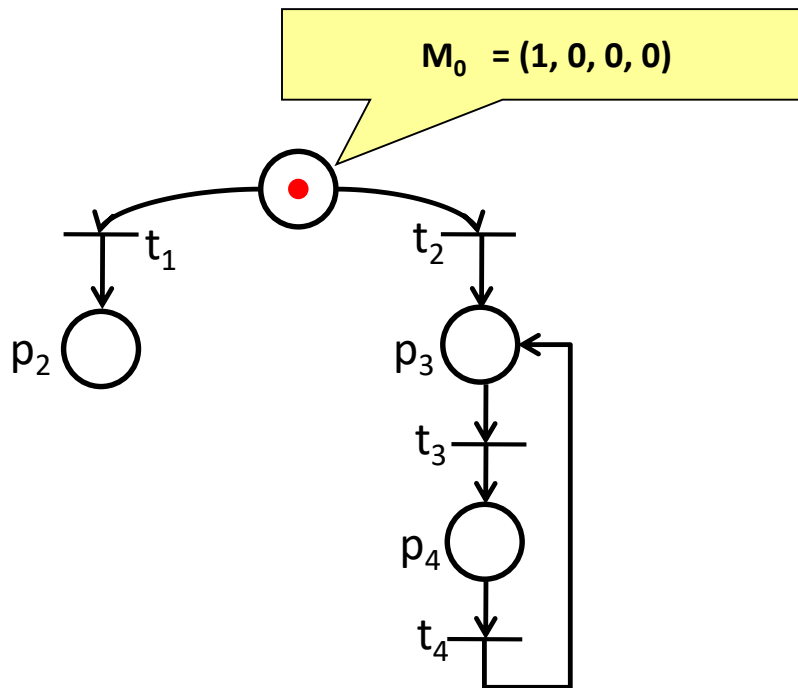


fig. a RdP quasi-vivant avec blocage

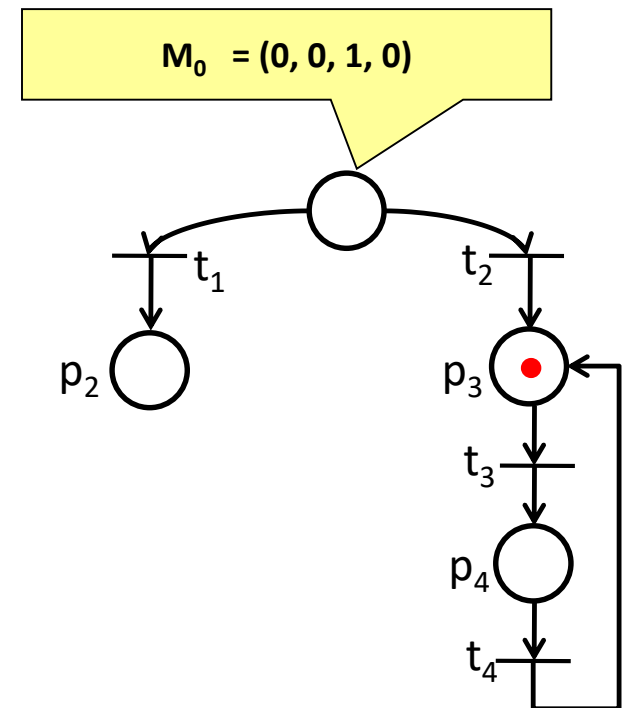


fig. b RdP non quasi-vivant sans blocage

Propriétés liées au marquage

3.6 Réinitialisation

On caractérise ici le fait que le système peut toujours se replacer dans un état donné, qui est dit état d'accueil. Si le marquage initial est un état d'accueil, cela signifie que l'on peut toujours réinitialiser le système

3.6.1 Etat d'accueil pour M_0

Un marquage atteignable M_a est appelé état d'accueil pour M_0 si et seulement si $\forall M_i \in A(R, M_0)$ il existe une séquence de tir s telle que $M_i [s > M_a$.

3.6.2 Réseau réinitialisable pour M_0

Un RdP est réinitialisable pour un marquage initial M_0 si M_0 est un état d'accueil.

Propriétés liées au marquage

3.6 Réinitialisation

Exemple :

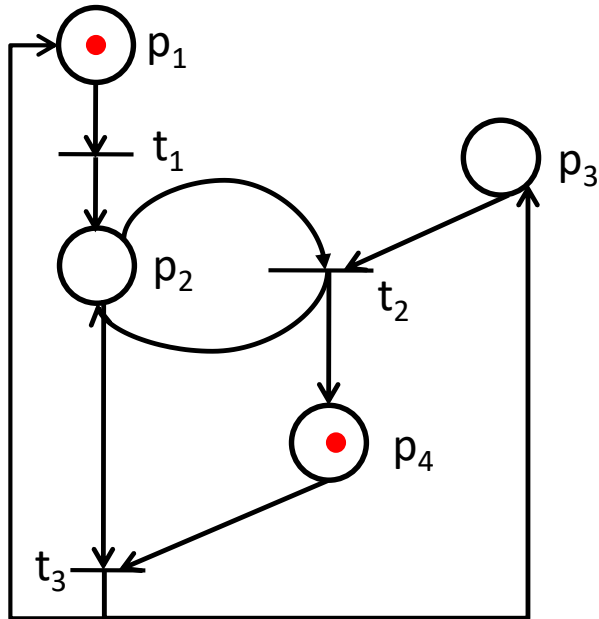


Fig. a: RdP non réinitialisable
conforme (sauf et vivant)

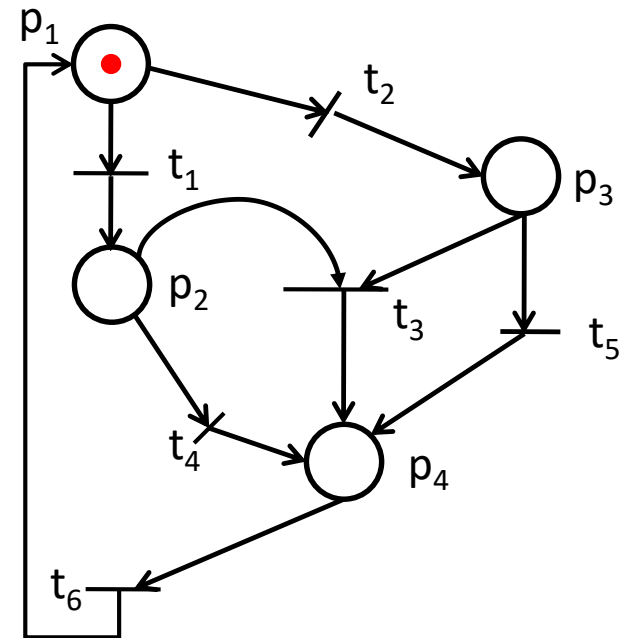


Fig. b: RdP réinitialisable
borné (sauf) et pseudo-vivant

Propriétés liées au marquage

3.7 Persistance

3.4.1 Réseau persistant pour M_0

S'il existe pour $M_i \in A(R, M_0)$ au moins deux transitions t_i et t_j sensibilisées (ou validées), le RdP sera dit **persistant** si et seulement si t_i et t_j peuvent être franchies (ou tirées) dans n'importe quel ordre (réversibilité). **C'est la notion conceptuellement importante de conflit et de partage de ressources.**

Exemple :

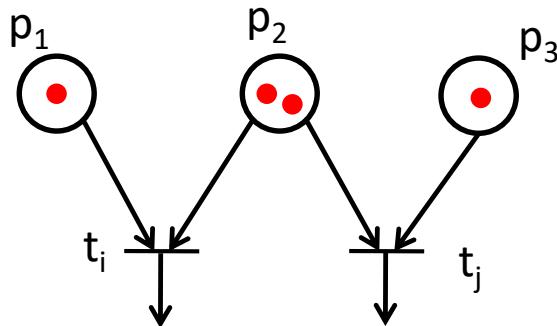


Fig. a : Réseau de Petri persistant

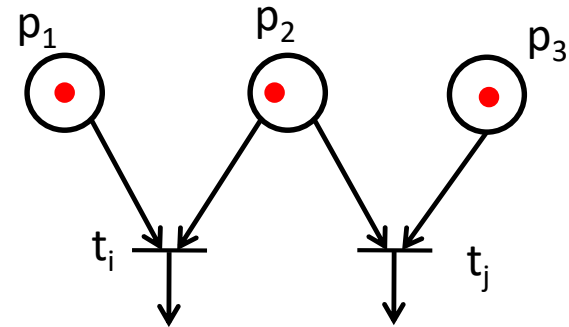


Fig. b : Réseau de Petri non persistant

Propriétés liées au marquage

3.8 Conflits

Définition :

Un conflit structurel correspond à un ensemble d'au moins 2 transitions t_1 et t_2 qui ont une place d'entrée en commun. On note ceci

$$K = [p_i, \{t_1, t_2, \dots\}].$$

Définition :

Un conflit effectif est l'existence d'un conflit structurel, K , et d'un marquage, M , tel que le nombre de marques dans p_i est inférieur strictement au nombre de transitions de sortie de p_i qui sont validées par M .

Ce conflit effectif est représenté par un triplet

$$K^e = [p_i, \{t_1, t_2, \dots\}, M].$$

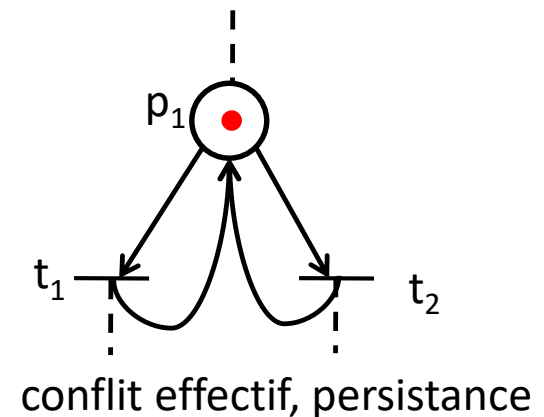
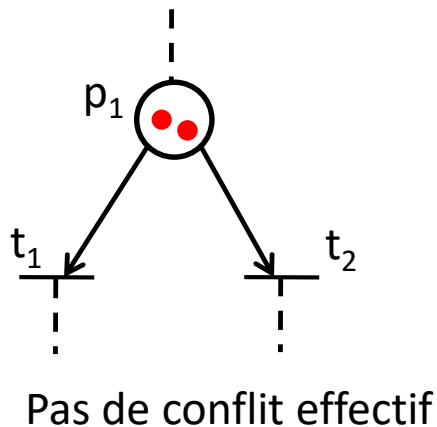
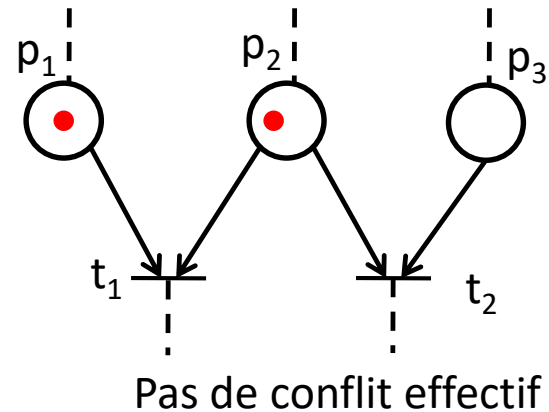
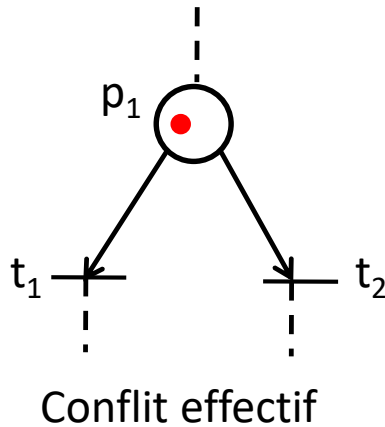
Définition :

Un RdP est sans conflit effectif pour un marquage initial M_0 , si pour tout marquage accessible $M \in A(R, M_0)$ il n'y a pas de conflit effectif

Propriétés liées au marquage

3.8 Conflits

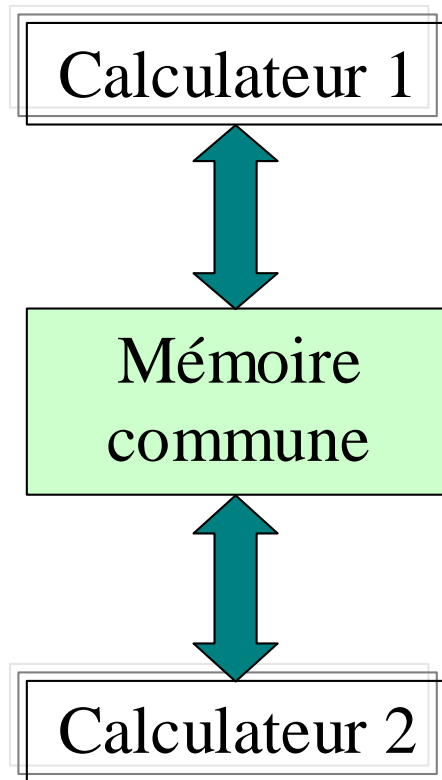
Exemple 1 :



Propriétés liées au marquage

3.8 Conflits

Exemple 1 : partage de ressource



Une mémoire commune

Deux calculateurs:

N'a pas besoin de la mémoire

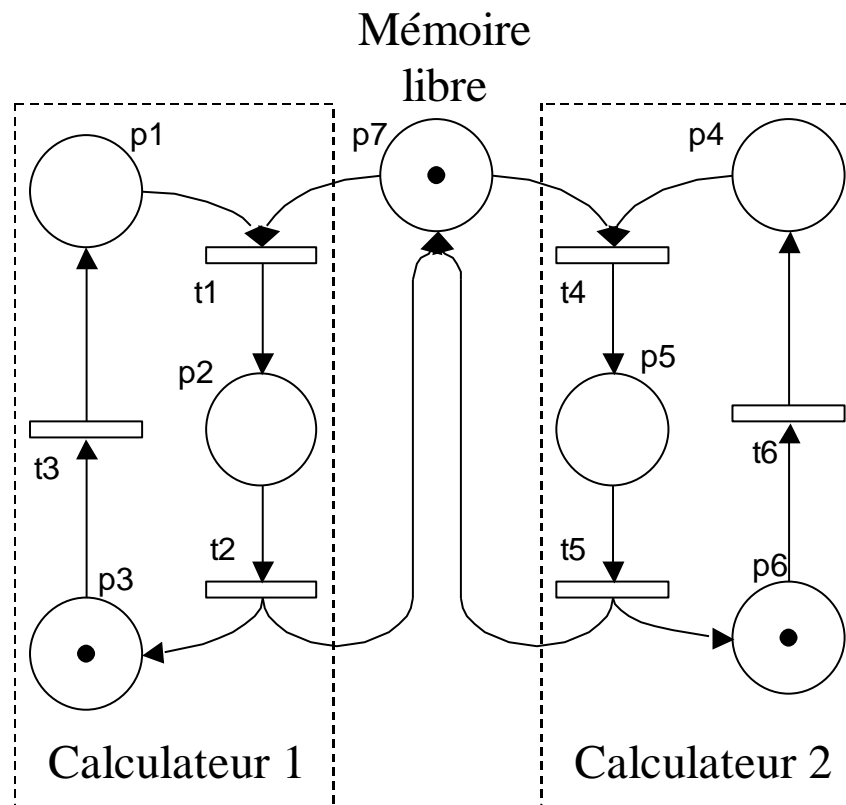
Demande la mémoire

Utilise la mémoire

Propriétés liées au marquage

3.8 Conflits

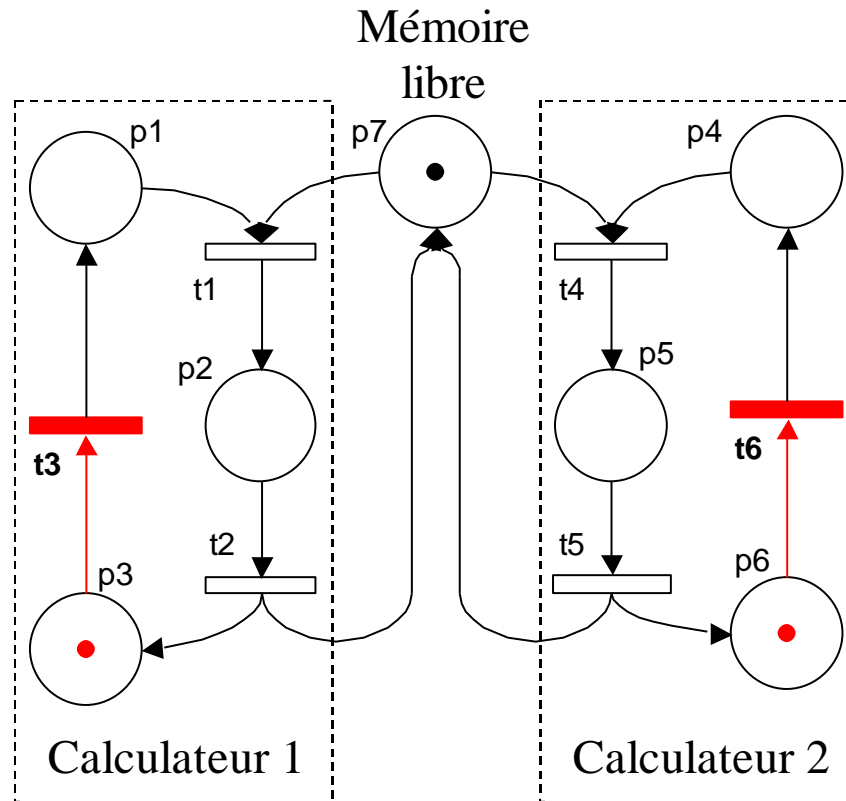
Exemple 1 : partage de ressource



Propriétés liées au marquage

3.8 Conflits

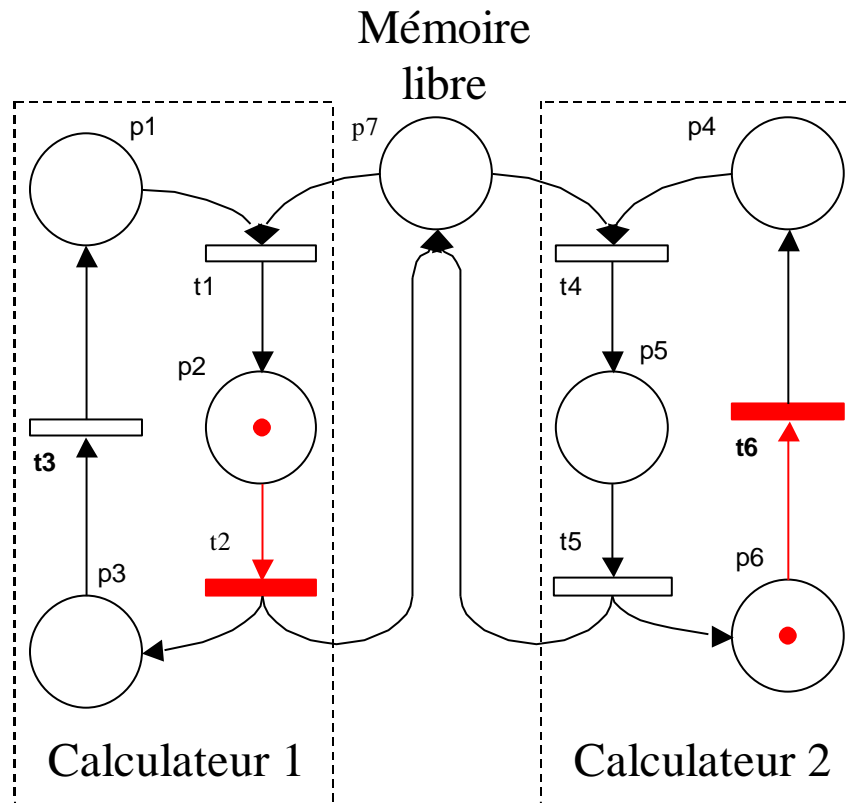
Exemple 1 : partage de ressource



Propriétés liées au marquage

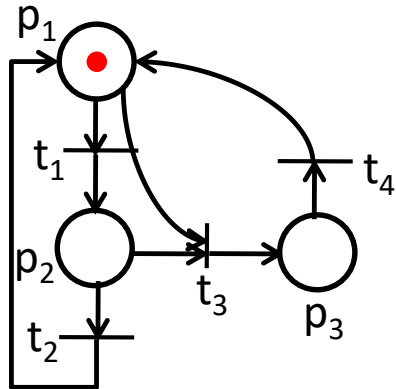
3.8 Conflits

Exemple 1 : partage de ressource

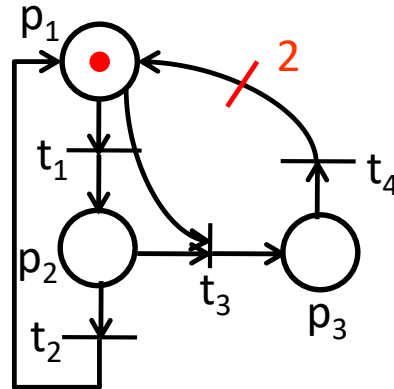


Propriétés liées au marquage

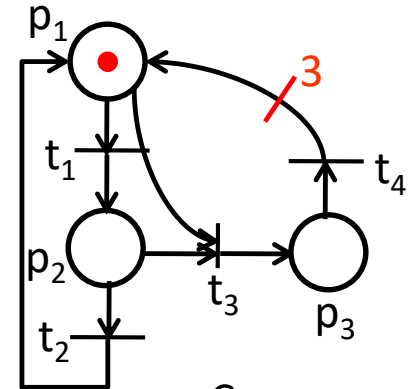
Exercice d'application



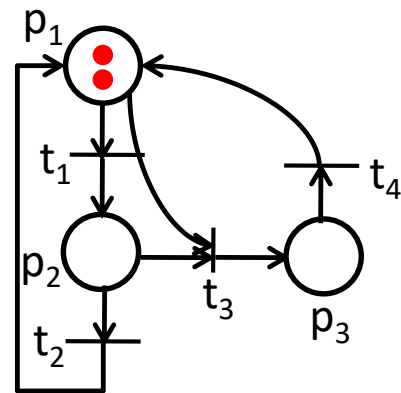
A



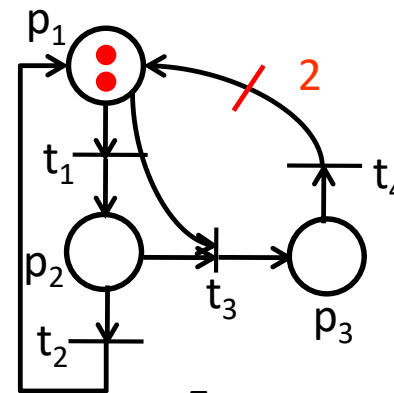
B



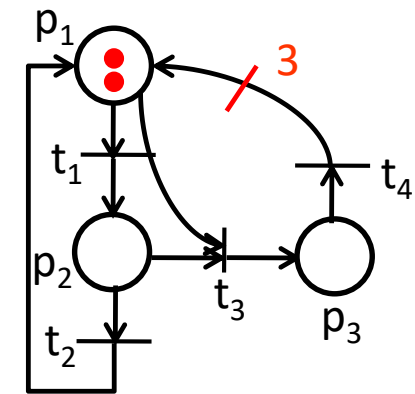
C



D



E



F

Propriétés liées au marquage

Exercice d'application 1

Réseaux	Bornage	vivacité	réinitialisation	conflit
A				
B				
C				
D				
E				
F				