Application 2

Inverse d'une matrice.

I) Définitions.

Soit $A \in M_n(K)$ (Une matrice carrée de taille n à valeurs dans le corps K). ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

<u>Définition 1</u> : On dit que A est une matrice inversible si et seulement si il existe une autre matrice $B \in M_n(K)$ tq :

$$AB = BA = I_n$$

<u>Notation</u> : On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles.

On montre, facilement, que $GL_n(K)$ possède une structure de groupe pour la multiplication matricielle.

(2) On notera A^{-1} pour désigner la matrice inverse de A.

Exo : Si A est inversible alors A^{-1} est unique.

Proposition : Soit $A \in M_n(K)$ et $f : K^n \longrightarrow K^n$ l'application linéaire ayant A comme matrice relative à la base $\mathcal{E}$.

On a équivalence entre :

1. A inversible
2. f bijective.
3. $rg\, f = n$
4. $rg\, A = n$

En effet :

Un schéma : $A \in M_n(K)$ $(A = a_{ij})$

$\updownarrow \longleftarrow$ $\boxed{f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i}$

$f : K^n \longrightarrow K^n.$

et si $X \in K^n$ $\left(X = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right)$

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i$$

③ $\Leftrightarrow$ ④ (voir cours [illegible])

④ $\Rightarrow$ ①

supposons que $\operatorname{rg} A = n$

par la technique d'échelonnement réduit.

on sait qu'il existe G tq

$$\tilde{A} = GA$$

on sait aussi que $\operatorname{rg} \tilde{A} = \operatorname{rg} A$

donc : $\tilde{A}$ vérifie : $\operatorname{rg} \tilde{A} = n =$ taille de $\tilde{A}$

la seule matrice $\tilde{A}$ possible est I_n

ainsi on conclut que : $A^{-1} = G$.

① $\Rightarrow$ ④ (évident)

① $\Longrightarrow$ ② (facile en utilisant le rang)

$$A \text{ inversible} \Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Longleftrightarrow \operatorname{rg} f = n \Longleftrightarrow f \text{ surj} \Longleftrightarrow f \text{ bij}$$

② $\Longrightarrow$ ③ évident.

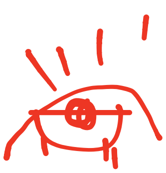
Exemple : En pratique, chercher à savoir si une matrice est inversible peut s'effectuer par l'échelon-réduite.

A		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$G_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice est échelonnée et donc : $\operatorname{rg} A = 3$



A est donc inversible

nous allons continuer la réduction pour donner A^{-1}

et je sais ce que je vais trouver I_3

$$G_2G_1A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \tau^3_{L_2\leftarrow L_2-2L_3} \qquad G_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$G_3G_2G_1A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \tau^3_{L_1\leftarrow L_1+L_3} \qquad G_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{G_4G_3G_2G_1A}{I_3} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \tau^3_{L_1\leftarrow L_1-2L_2} \qquad G_4 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c'est fini

A^{-1}

$$\boxed{A^{-1} = G_4\cdot G_3\cdot G_2\cdot G_1}$$

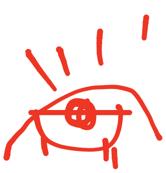
⚠ Il y'a mieux :

On trouve A^{-1} sans calculer $G_4 \cdot G_3 \cdot G_2 \cdot G_1$!!

Exemple : En pratique, chercher à savoir si une matrice est inversible peut s'effectuer par l'échelonnage-réduit.

A		$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		

La matrice est échelonnée et on a : $\operatorname{rg} A = 3$



A est donc inversible

nous allons continuer la réduction pour donner A^{-1}

et je sais ce que je vais trouver I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau^3_{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau^3_{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau^3_{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \qquad \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Application 3 :

Résolution d'un système linéaire.

I) Définitions

Définition : Soit E un K.e.v.

On appelle un système linéaire tout système d'équations du type :

$$(E)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

les a_{ij} ; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, les x_j ; $j = 1 \dots p$

et les b_i ; $i = 1 \dots n$ sont

tous des éléments de K.

On dit que (E) est un système linéaire ayant n équations et p inconnues (les $x_1 \dots x_p$).

Nous pouvons réécrire (E) sous sa forme matricielle par :

$$(E) : \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

et on note : $(E) : \quad A X = b$

A = matrice du système

X = vecteur des inconnues

et b = vecteur du second membre.

Rque ① Au système linéaire (E) on associé le système linéaire homogène $(E_0) : AX = 0$.

② L'ensemble $S = \{X \in E \,/\, AX = b\}$ s'appelle ensemble des solutions de E

et $S_0 = \{X \in E \,/\, AX = 0\}$

est l'ensemble homogène associé.

③ Notre souci principal devant un système linéaire est de chercher l'ensemble de des solutions (quand cela est possible).

Exemple :
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x + y + z = 3 \end{cases} \quad (E)$$

(E) est un système linéaire

et on a : $(E) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Remarque importante : Soit $(E) : AX = b$ un système linéaire avec

$$A \in M_{np}(K).$$

Supposons que f est l'application linéaire de $K^p \longrightarrow K^n$

$x \longmapsto f(x)$

telle que A est la matrice de f relative aux bases $\mathcal{E}, \mathcal{F}$.

on peut reecrire (E) par : Etant donné $b \in K^n$, Trouver $X \in K^p$ tels que $AX = b$.

On appelera une procedure de résolution du système (E), toute action

de rechercher de X
tq : $AX = b$
on la recherche de $x \in \mathbb{K}^p$
tq : $f(x) = b$.

Proposit. ① chercher une solut. de (E_0) c'est chercher $\operatorname{Ker} f$:

on a : $S_0 = \operatorname{Ker} f$.

Proposit. 2 : X est une solut. de (E) : $AX = b$
ssi X est solut.

de $(\tilde{E})$: $GAX = Gb$

où G est une matrice inversible.

Proposition 3 : Si $A \in M_n(K)$ est matrice inversible alors $\forall b \in K^n$, il existe un unique $X \in K^n$ tel que : $AX = b$

Remarque : $X = A^{-1}b$.

Proposition 4 : Soit (E) : $AX = b$

Si on note : $(\tilde{E}) = \tilde{A}X = \tilde{b}$

où $\tilde{A}$ est la matrice échelonnée réduite de A

et $\tilde{b}$ est obtenue en

appliquant à b les mêmes τ_i appliqués à A pour obtenir $\tilde{A}$

$(\tilde{E})$ possède des solutions si et seulement si $\tilde{b}_i = 0$ pour i = indice d'une ligne non principale de $\tilde{A}$.

et Au passage et d'après la proposition 2, (E) et $(\tilde{E})$ possèdent les mêmes solutions (quand cela est possible).

Exercice : Résoudre les systèmes.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ -x + 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z - t + u = 0 \\ -2x + y - z + t + u = -1 \\ -x + y + z - 2t + 3u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 1 \\ -x + 2y + z + t = 2 \\ -x + y + 7z - t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ -x - y + z - 2t = 0 \\ -x + y - z - t = 2 \end{cases}$$