Chapitre V : Les systèmes centrés

I. Généralités

Nous avons toujours considéré dans les chapitres précédents des systèmes optiques comme des surfaces sphériques ou planes, réfringentes ou réfléchissantes de la lumière. En réalité ces systèmes optiques sont le plus souvent une association de plusieurs types de surfaces ayant même axe principal. La formation des images à travers ces systèmes passe alors par plusieurs étapes intermédiaires.

1. Définition

Un système centré est un ensemble de milieux transparents séparés par des surfaces planes ou sphériques dont l'axe principal est celui de toutes les surfaces du système centré.

On distingue deux types de systèmes centrés :

- Systèmes dioptriques : composés seulement de dioptres
- Systèmes catadioptriques : composés de miroirs et de dioptres

2. Exemples

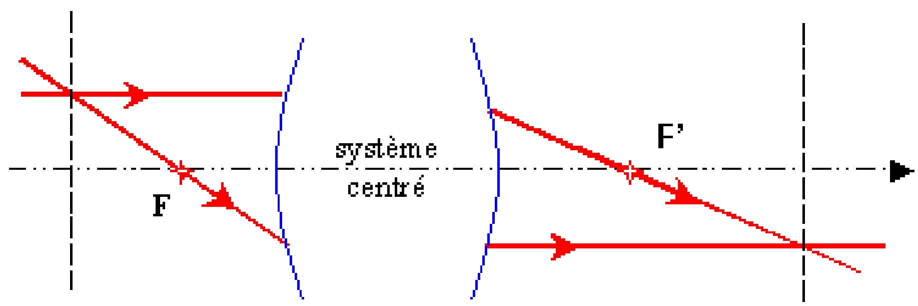
- Une lentille est une association de deux dioptres sphériques
- Une boule est une association d'un dioptre plan et d'un dioptre sphérique
- Un oculaire est une association de deux lentilles
- Une boule argentée sur sa face sphérique extérieure est une association d'un dioptre plan et d'un miroir sphérique concave.
- Une loupe …….

3. Stigmatisme des systèmes centrés :

Il serait bien difficile de parler d'un stigmatisme parfait dans le cas d'un système centré. Pour le stigmatisme approché il peut se réaliser uniquement si les rayons sont paraxiaux "conditions d'approximation de Gauss". Pour satisfaire ces conditions on utilise des systèmes optiques de faible ouverture et les objets sont autour de l'axe principal. La correspondance d'un objet plan, de petite dimension et situé sur l'axe optique est alors une image plane et perpendiculaire à l'axe principal.

4. Etude d'un système centré à foyer :

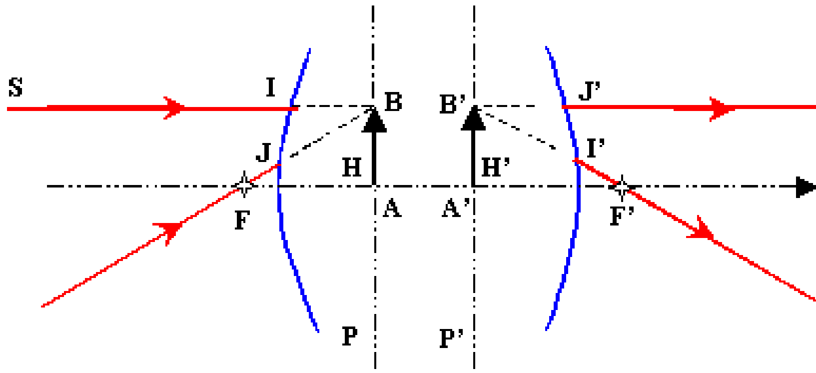
Un système est dit à foyer si ses foyers objet et image ne sont pas rejetés à l'infini.



II. Plans principaux

1 – Définition

Ce sont deux plans conjugués P et P' pour lesquels le grandissement est égale à **1**. Un objet AB appartenant à P aura une image A'B' appartenant à P' et de même longueur que AB. P et P' sont appelés les plans principaux objet et image.



2 – Explication

- ✓ Un rayon incident SI // à l'axe principale émerge au foyer image F' du système centré.
- ✓ L'émergent J'S' // à l'axe principale correspond à l'incident passant par le foyer F.
- ✓ Le prolongement des 2 rayons SI et FJ donne le point objet virtuel B.
- ✓ Le prolongement des 2 rayons J'S et F'I' donne le point image virtuel B'.

Nous avons considéré un objet plan et perpendiculaire à l'axe principal. La correspondance de plan à plan dans les conditions d'approximation de Gauss pour les systèmes centrés, donnera une image plane et perpendiculaire à l'axe principal. On peut montrer par construction géométrique que pour tout système centré à foyer si l'objet virtuel HB est situé sur le plan P alors on aura une image H'B' virtuelle située sur un plan P' tel que le grandissement égale à 1.

- ➢ AB appartient alors au plan principal objet P: lieu des points d'intersection des incidents parallèles à l'axe avec les émergents correspondants passants par le foyer F'.

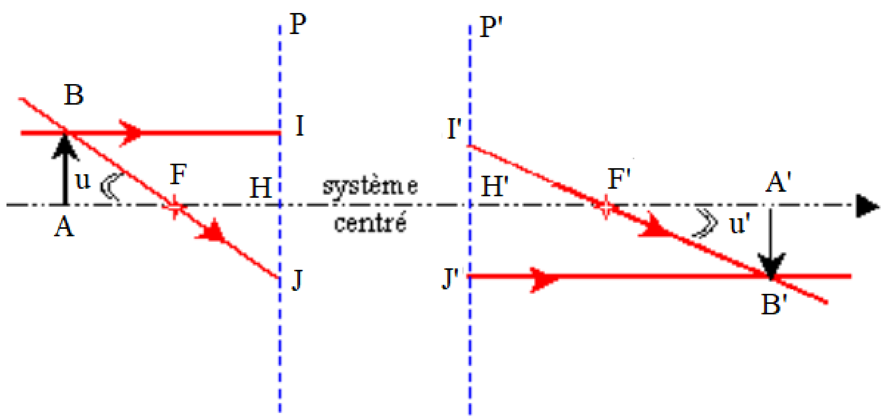
- A'B' appartient alors au plan principal image P': lieu des points d'intersection des incidents passants par F' et des émergents // à l'axe principal.
- H est le point d'intersection du plan principal objet avec l'axe principal
- H ' est le point d'intersection du plan principal image avec l'axe principal

On définit dans toute la suite la distance focale objet f par $f = \overline{HF}$ et la distance focale image f ' par $f' = \overline{H'F'}$. On appellera ainsi les points cardinaux d'un système centré, l'ensemble des points (F, F', H et H').

III. Construction de l'image d'un objet AB à travers un système centré :

1. Formule de conjugaison d'un système centré :

On considère un système centré de points cardinaux (F, F', H et H') et soit un objet AB réel situé sur l'axe principal du système.



- ✓ Le rayon BI incident // à l'axe principal, émerge en passant par le foyer image F'.
- ✓ Le rayon BFJ incident passant par le foyer objet F, émerge // à l'axe principal.
- ✓ B' est l'image de B, obtenue en joignant l'intersection des 2 rayons IF' et JJ'.

- On considère les triangles semblables (BIJ) et (HFJ), nous avons :

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{JI}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{IB}} \quad \text{avec } \overline{\mathrm{IB}} = \overline{\mathrm{HA}} \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{IJ}} \qquad (1)$$

- On considère les triangles semblables (H'F'I') et (J'B'I'), nous avons :

$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{J'B'}} = \frac{\overline{H'I'}}{\overline{J'I'}} \quad \text{avec} \quad \overline{\mathrm{J'B'}} = \overline{\mathrm{H'A'}} \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{JI}} \qquad (2)$$

En sommant membre à membre les équations (1) et (2) on obtient :

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{IJ}} + \frac{\overline{HI}}{\overline{JI}} = \frac{\left(\overline{HJ} - \overline{HI}\right)}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{\mathrm{IJ}}}{\overline{\mathrm{IJ}}} = 1$$

Donc :

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = 1$$

C'est la relation de conjugaison des systèmes centrés à foyers avec origine aux points principaux H et H'.

Si on pose **f = HF** et **f' = H'F'** alors cette formule devient :

$$\frac{f}{\overline{HA}} + \frac{f'}{\overline{H'A'}} = 1$$

Dans les triangles AB F et A'B'F on a :

$$\tan u = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{H'J'}}{\overline{HF}} \quad \text{ce qui donne} \quad \gamma = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{f}{\overline{AF}}$$

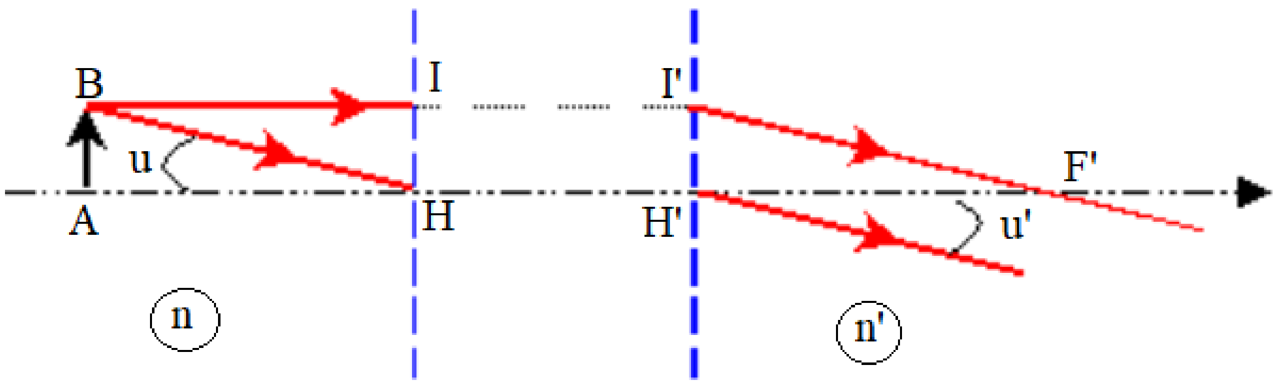
$$\tan u' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} = \frac{\overline{H'I'}}{\overline{H'F'}} = \frac{\overline{AB}}{f'} \quad \text{ce qui donne} \quad \gamma = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{A'F'}}{f'}$$

<u>Remarque :</u>

La donnée des points cardinaux définit complétement le système centré.

2. La vergence d'un système centré :

Soit un système centré représenté par ses points cardinaux (F, F', H et H'). On considère un objet AB situé sur le plan focal objet P_F du système.



- Dans les triangles HAB et H'F'I' on a :

$$\tan u = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} \approx u \qquad ; \qquad \tan u' = \frac{\overline{H'I'}}{\overline{H'F'}} \approx u'$$

- D'après la loi de Snell-Descartes pour la réfraction, on a :

$$n \sin u = n' \sin u'$$

Donc $$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$$

C'est une relation valable quelque soit le système centré.

On définit la vergence d'un système centré par :

$$V_S = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$: exprimée en dioptrie (m^{-1}).

- Un système centré est convergent si sa vergence est positive : $\mathbf{V_s > 0}$
- Un système centré est divergent si sa vergence est négative : $\mathbf{V_s < 0}$

Remarques :

Dans une construction géométrique :

- le plan principal image est le lieu des points d'intersection des rayons incidents // à l'axe principal avec les émergents correspondants (qui passent par F').
- le plan principal objet est le lieu des points d'intersection des rayons incidents passent par le foyer objet avec les émergents correspondants (qui sont // à l'axe).

IV. Association de deux systèmes centrés à foyers :

1. Association de deux systèmes dioptriques :

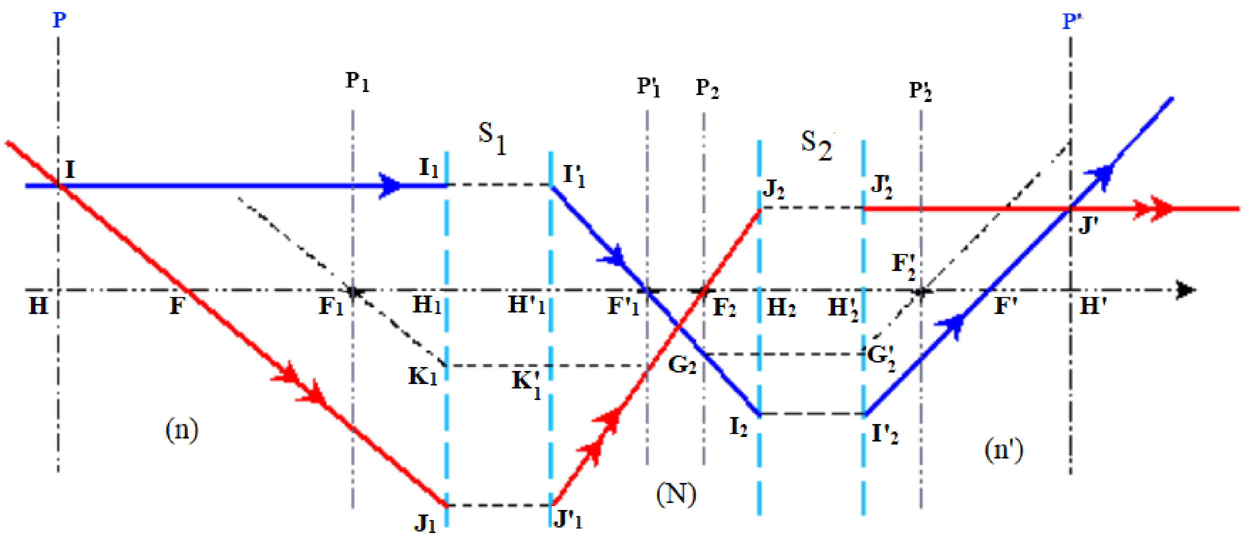
Quand on associe deux systèmes centrés de manière à ce que leurs axes principaux soient confondus on obtient un seul système S centré équivalent.

Soient 2 systèmes centrés S_1 et S_2 de points cardinaux (H_1, F_1, H'_1, F'_1) et (H_2, F_2, H'_2, F'_2) respectivement, disposés comme sur la figure ci-dessous.

On veut déterminer pour le système S équivalent les points cardinaux (H, H', F et F').

a. Construction géométrique :

$$f_1 = \overline{H_1F_1} \quad , \quad f_2 = \overline{H_2F_2} \quad , \quad f_1' = \overline{H_1'F_1'} \quad , \quad f_2' = \overline{H'_2F_2'}$$



<u>Explications :</u>

- les indices de réfraction des milieux extrêmes sont n et n'
- l'indice du milieu compris entre S_1 et S_2 est N.
- L'incident II_1 // à l'axe principal émerge en $I'_1F'_1$ à la traversée du système S_1.

$I'_1F'_1I_2$ est alors un nouveau incident qui va émerger en I'_2F' // à $G'_2F'_2$.

- Le rayon J'_2J' // à l'axe principal est l'émergent d'un faisceau incident $J'_1F_2J_2$ traversant le système S_2. $J'_1F_2J_2$ est un émergent d'un incident FJ_1, qui est // à F_1K_1, incident passant par le foyer objet de S_1.
- On appelle l'intervalle optique Δ du système équivalent S, la quantité $\Delta = \overline{F'_1F_2}$
- On appelle l'épaisseur du système équivalent S, la quantité $e = \overline{H'_1H_2}$.
- On montre que : $\mathbf{\Delta = e + f_2 - f'_1}$

b. Méthode analytique :

En utilisant la relation de Newton $f.f' - \overline{FA}.\overline{F'A'} = 0$ pour les couples de points (F'_1, F') et (F, F_2) pour S_1 et S_2, on peut écrire alors :

- Pour le couple (F'_1, F') nous avons en utilisant le système S_2 :

$$f_2.f'_2 - \overline{F_2F'_1}.\overline{F'_2F'} = 0 \quad \text{ce qui donne :} \quad \overline{F'_2F'} = -\frac{f_2.f'_2}{\Delta}$$

- Pour le couple (F, F_2) nous avons en utilisant le système S_1 :

$$f_1.f'_1 - \overline{F_1F}.\overline{F'_1F_2} = 0 \quad \text{ce qui donne :} \quad \overline{F_1F} = \frac{f_1.f'_1}{\Delta}$$

Ces deux relations donnent les positions des foyers image F' et objet F du système centré équivalent des deux systèmes S_1 et S_2, en fonction des distances focales de S_1 et de S_2 et de l'épaisseur **e** du système.

On peut aussi montrer une relation importante pour les foyers objets et images du système équivalent :

Démonstration de l'expression de f ':

Soient les triangles semblables (J'H'F') et ($H'_2G'_2F'_2$) :

$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{F'_2H'_2}} = \frac{\overline{H'J'}}{\overline{G'_2H'_2}} = -\frac{f'}{f'_2}$$

Soient les triangles semblables ($F_2G_2F'_1$) et ($H'_1I'_1F'_1$) :

$$\frac{\overline{F'_1F_2}}{\overline{H'_1F'_1}} = \frac{\overline{G_2F_2}}{\overline{H'_1I'_1}} = \frac{\overline{G'_2H'_2}}{\overline{H'J'}} = \frac{\Delta}{f'_1}$$

On multiplie les deux relations précédentes entre elles et on obtient :

$$f' = \overline{H'F'} = -\frac{f'_2\, f'_1}{\Delta}$$

La Vergence du système S équivalent :

$$V_S = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = -n'\frac{\Delta}{f'_2\, f'_1} \qquad (*)$$

On montre aussi que la vergence du système S équivalent peut s'écrire sous la forme suivante :

Les vergences V_{S1} et V_{S2} des deux systèmes S_1 et S_2 respectivement sont données par :

$$V_{S1} = \frac{N}{f_1'} = -\frac{n}{f_1} \quad ; \quad V_{S2} = \frac{n'}{f_2'} = -\frac{N}{f_2}$$

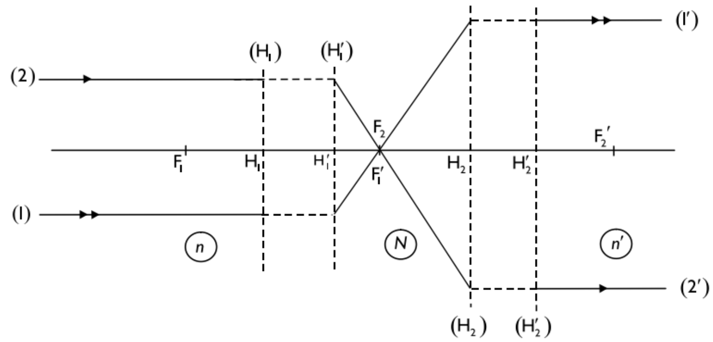
En remplaçant Δ par son expression dans l'équation (*) et en développant V_S, on trouve

$$V_S = V_{S1} + V_{S2} - e\frac{V_{S1}.V_{S2}}{N}$$

C'est la formule de Gullstrand, avec **e** est l'épaisseur et **N** l'indice du milieu compris entre S_1 et S_2

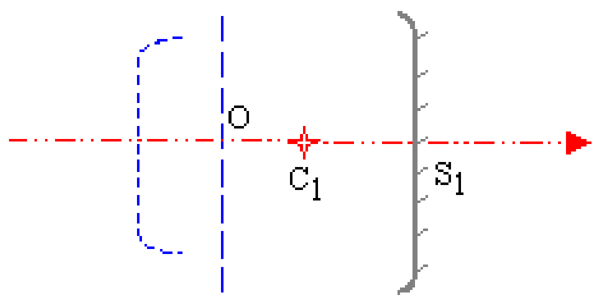
2. Systèmes centrés afocaux

À tout incident parallèle à l'axe correspond un émergent également parallèle à l'axe. Ces systèmes présentent un intérêt particulier pour la vision des objets très éloignés (lunettes, télescope, etc.). Pour rendre afocal un instrument constitué par l'association de deux systèmes centrés, il suffit de faire coïncider le foyer image du premier avec le foyer objet du second.



3. Systèmes catadioptriques

Un système catadioptrique résulte de l'association d'un système dioptrique et d'un miroir. Si le miroir est sphérique, le système catadioptrique possède alors un foyer et le système équivalent est un miroir sphérique unique. On peut aussi parler de l'association d'une lentille et d'un miroir plan, d'un dioptre plan et d'un miroir sphérique, d'un miroir plan et d'un dioptre sphérique etc…..



Eléments du miroir équivalent :

Si l'une des surfaces est sphérique, le système est équivalent à un miroir sphérique dont le sommet S, le foyer F et le centre C sont tels que.

- Le sommet S est l'image du Sommet S_1 du miroir réel à travers le système dioptrique dans le sens de la lumière réfléchie.
- Le centre C est l'image du centre C_1 du miroir réel à travers le système dioptrique dans le sens de la lumière réfléchie.
- Le foyer F est tel que : SF = SC/2

V. Les lentilles

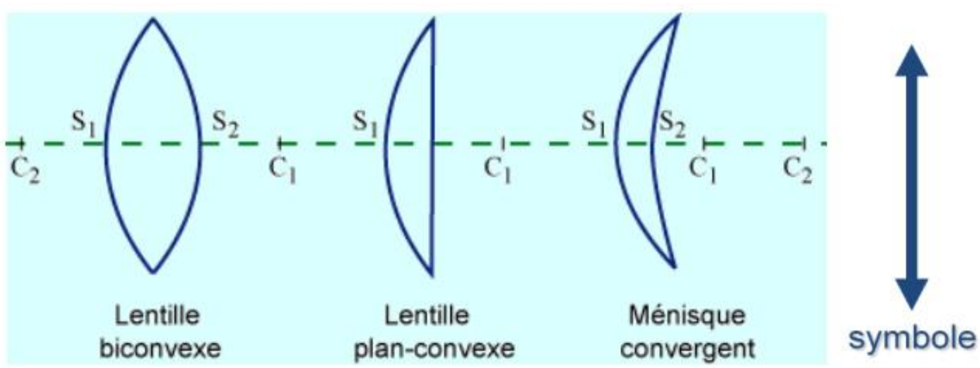
1. Les lentilles épaisses :

a- Définition :

Une lentille est un système formé par l'association de deux dioptres dont l'un au moins est sphérique. C'est un système centré d'axe, la droite joignant les deux centres de ces deux dioptres. On distingue plusieurs types de lentilles. Elles peuvent être classées en deux catégories :

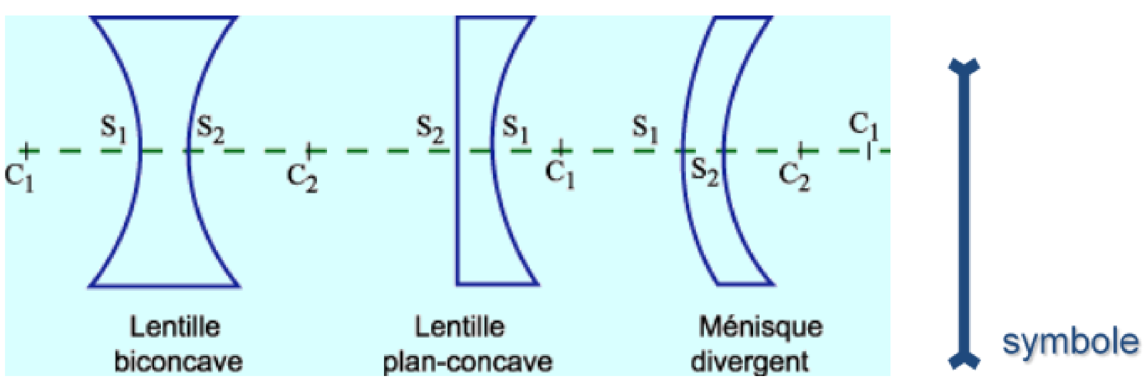
b- Disposition :

- Les lentilles dont le bord est plus mince que le centre sont convergentes :



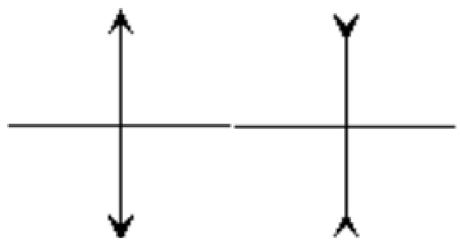
(a)

- Les lentilles dont le bord est plus épais que le centre sont divergentes :



(b)

L'épaisseur d'une lentille est donnée par : $\mathbf{e = S_1S_2}$. Une représentation simplifiée des lentilles convergentes et divergentes peut se faire comme suit :



c- Stigmatisme

Le stigmatisme approché des lentilles est lié à celui des dioptres formant ces lentilles. Les conditions de stigmatisme seront réalisées dans l'approximation de Gauss :

- Lentille de faible ouverture
- Objet plan et perpendiculaire à l'axe optique
- Objet de faible étendue

d- Eléments cardinaux des lentilles épaisses :

Sachant qu'une lentille L peut être traitée comme association de deux dioptres dont l'un au moins est sphérique, on peut établir les points cardinaux de ce système centré (si l'un des deux dioptres est plan, il suffit de faire tendre son rayon vers l'infini dans la relation obtenue).

Soient deux dioptres D_1 et D_2 tels que $\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$ soient les centres respectifs de ces dioptres. $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F'_1}$ sont les deux foyers objet et image de D_1 ; $\mathbf{F_2}$ et $\mathbf{F'_2}$ sont les deux foyers objet et image de D_2.

Nous rappelons aussi que pour les dioptres D_1 et D_2, nous avons

$$\mathbf{H_1 \equiv H'_1 \equiv S_1 \quad et \quad H_2 \equiv H'_2 \equiv S_2.}$$

On pose:

$$f_1 = \overline{S_1F_1} \quad , \quad f_2 = \overline{S_2F_2} \quad , \quad f_1' = \overline{S_1F'_1} \quad , \quad f'_2 = \overline{S_2F'_2} \quad ,$$

$$\Delta = \overline{F'_1 F_2} \quad , \quad e = \overline{S_1S_2}$$

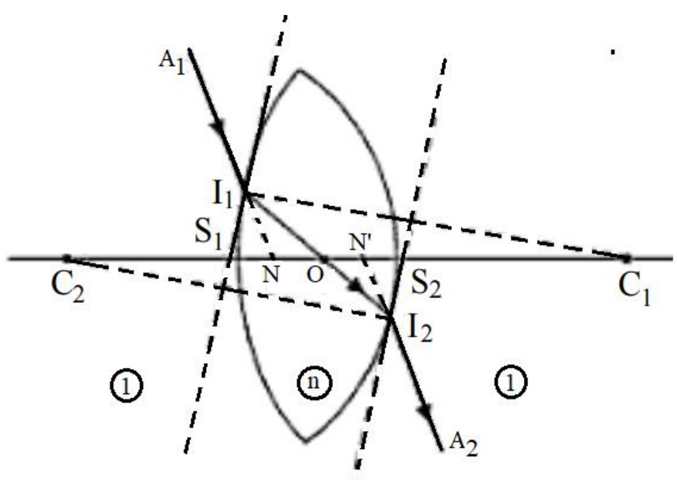
On considère que les points H, H', F et F' sont les points cardinaux de la lentille L. On peut alors calculer $\overline{S_2F'}$, $\overline{S_2H'}$, $\overline{S_1F}$, $\overline{S_1H}$ et $\overline{HH'}$:

Ainsi : $\overline{S_2F'} = f'_2 - \dfrac{f_2 f'_2}{\Delta}$, $\overline{S_2H'} = \overline{S_2F'} - \overline{H'F'} = f'_2 - \dfrac{f_2 f'_2}{\Delta} + \dfrac{f'_2\, f'_1}{\Delta}$

De la même façon, on calcule $\overline{S_1F}$ et $\overline{S_1H}$ et ensuite $\overline{HH'}$

e- Centre optique d'une lentille :

On appelle centre optique O un point (unique) de l'axe, appartenant au milieu n, tel qu'à tout rayon incident passant par ce point après réfraction sur le premier dioptre correspond un émergent de la lentille parallèle à l'incident.



On montre que la position de O est donnée par la formule :

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}}$$

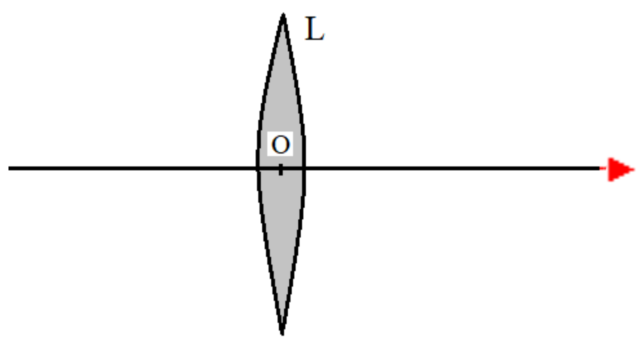
Cette relation est indépendante de la forme de la lentille.

Notons que O est le conjugué de N à travers S_1 et de N' à travers S_2.

2. Les lentilles minces

a- Définition

Les lentilles minces sont particulièrement importantes dans l'étude de plusieurs systèmes optiques. On se limitera au cas où les deux faces de la lentille sont baignées dans un même milieu, généralement l'air d'indice 1. Une lentille est dite mince si son épaisseur est faible par rapport aux rayons de courbure.



On peut montrer que pour une lentille mince :

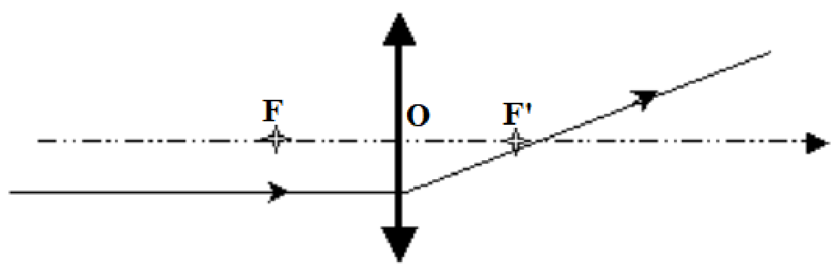
- $e \ll R_1, R_2$ et $e \ll |R_1 - R_2|$
- S_1, S_2, H et H' sont aussi confondus avec O pour une lentille mince
- Un rayon qui passe par le centre O d'une lentille mince traverse sans déviation.

b- Formules :

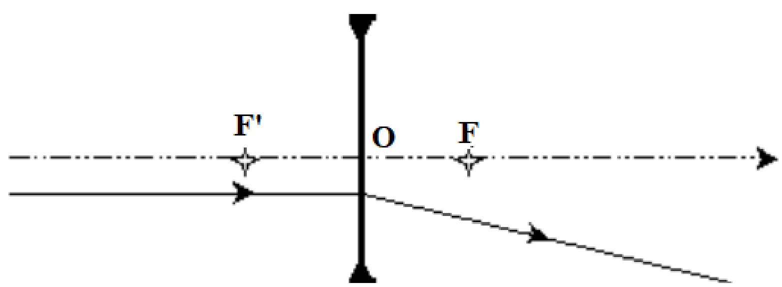
Une lentille mince est un système centré qui possède H, H', F et F', or les milieux extrêmes sont les mêmes, c'est à dire : $f = HF = - f' = - H'F'$.

Soit un objet AB réel situé devant la face d'entrée d'une lentille mince L. On distingue deux types de lentilles minces :

- Lentille mince convergente ayant une distance focale image **f ' > 0** et peut être représentée comme sur la figure suivante

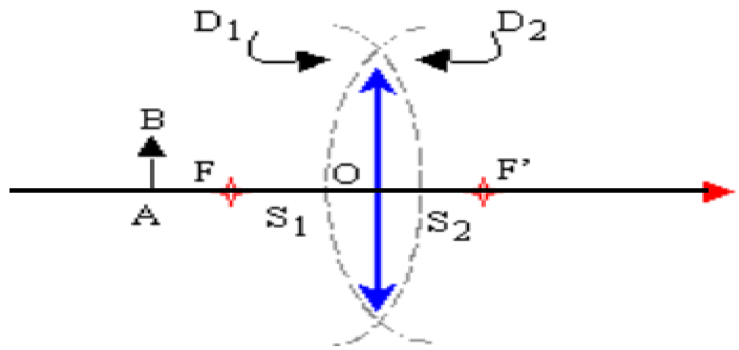


- Lentille mince divergente ayant une distance focale image **f ' < 0** et peut être représentée comme sur la figure suivante.



Soit un objet AB réel situé devant la face d'entrée d'une lentille mince L (voir figure ci-dessous). L'image de AB à travers le dioptre D_1 est A_1B_1, une image intermédiaire ; A_1B_1 donne à travers le dioptre D_2 une image A'B' finale. On utilise les relations de conjugaisons des dioptres sphériques dans les conditions d'approximation de Gauss :

On considère que $S \equiv S_1 \equiv S_2$



- Pour le diptre D_1 : $\dfrac{1}{\overline{SA}} - \dfrac{n}{\overline{SA_1}} = \dfrac{(1-n)}{\overline{SC_1}} = \dfrac{(1-n)}{R_1}$

- Pour le diptre D_2 : $\dfrac{1}{\overline{SA_1}} - \dfrac{n}{\overline{SA'}} = \dfrac{(n-1)}{\overline{SC_2}} = \dfrac{(n-1)}{R_2}$

On a : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = ?$

- Pour le diptre D_1 : $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{n}\dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}}$

- Pour le diptre D_2 : $\gamma_2 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{n}{1}\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA_1}}$

On déduit : $\dfrac{1}{\overline{SA}} - \dfrac{1}{\overline{SA'}} = (n-1)\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)$ et $\gamma = \dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

Avec la notation $S \equiv O$, on peut écrire les deux relations de conjugaisons d'une lentille mince avec origine au centre :

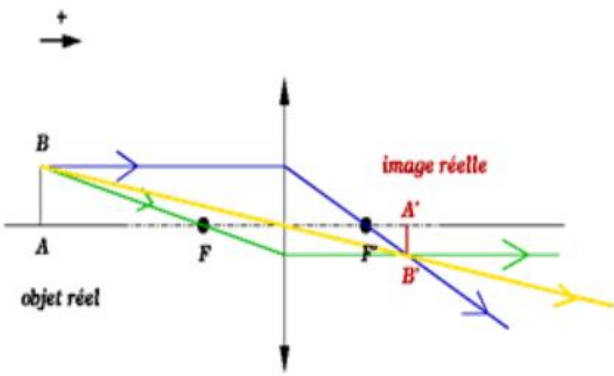
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- On appelle **C = 1/f'** convergence d'une lentille mince.
- Les formules de Newton s'écrivent :

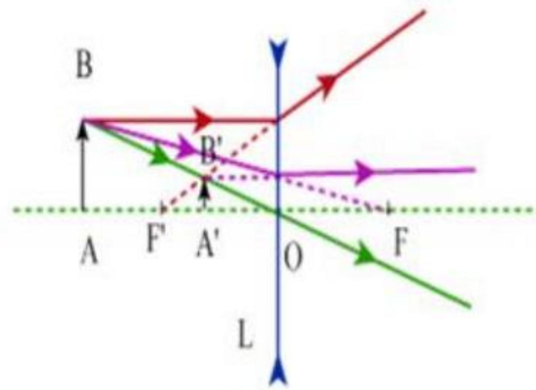
$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2 \qquad \text{et} \qquad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

c- Construction d'images

Les règles de construction sont identiques à celles déjà évoquées dans les chapitres précédents. En retiendra en particulier que tout rayon passant par O n'est pas dévié.



Lentille convergente



Lentille divergente

d- Les doublets de lentilles minces

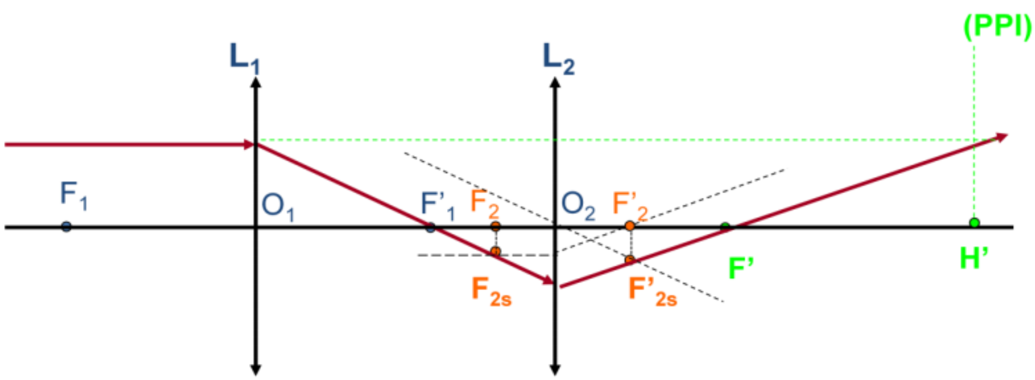
On appelle doublet une association de deux lentilles minces placées dans le même milieu. Les lentilles peuvent être convergentes ou divergentes telles que leurs axes optiques sont confondus. On représente un tel doublet par le symbole (m, n, p) avec la condition suivante :

$$\frac{f'_1}{m} = \frac{e}{n} = \frac{f'_2}{p} \qquad \text{Où :}$$

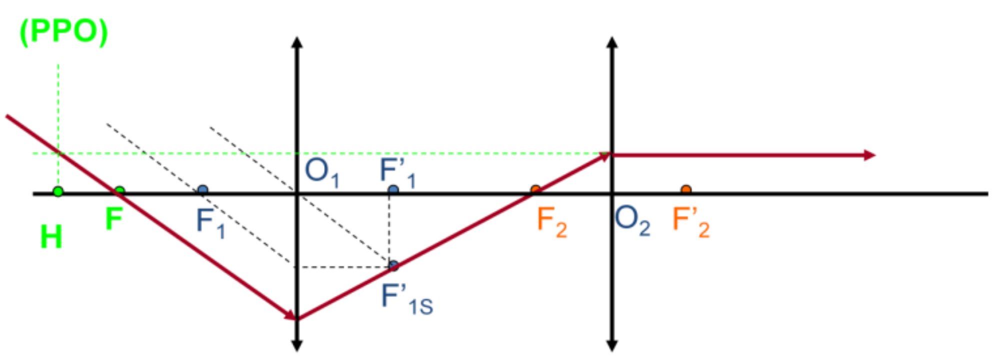
e : épaisseur ; f'_1 et f'_2 sont les distances focales image des lentilles L_1 et L_2.

La position des foyers F et F' et les distances focales du doublet sont déterminées aisément en suivant la méthode décrite dans le chapitre précédent et concernant l'association de deux systèmes centrés.

$$\overline{F'_2F'} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta} \qquad \text{et} \qquad f' = \overline{H'F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$



$$\overline{F_1F} = \frac{f_1 f'_1}{\Delta} \qquad \text{et} \qquad f = \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$$



En particulier la formule de Gullstrand s'écrit :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}$$